

Controllo dei Robot

Statica

Paolo Lino

Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Politecnico di Bari

e-mail: paolo.lino [at] poliba.it

Statica

Obiettivo della statica è quello di stabilire un legame tra forze/momenti all'organo terminale e forze/coppie ai giunti, con il manipolatore in condizioni d'equilibrio (robot fermo).

- τ Vettore delle coppie ai giunti: forze (giunti prismatici) o coppie (giunti rotoidali) ai giunti
- γ Vettore delle forze esplicate dall'organo terminale: forze/momenti esercitati dall'organo terminale sull'ambiente (uguali e opposte a quelle di reazione esercitate dall'ambiente sull'organo terminale)

- Quale τ applicare ai giunti affinché il robot eserciti una γ sull'ambiente?
- Quale τ ai giunti equilibra una forza $-\gamma$ esercitata dall'ambiente sull'organo terminale?
- Qual è l'effetto τ percepito dai giunti in presenza di una forza $-\gamma$ esercitata dall'ambiente sull'organo terminale?

Statica

Forze agenti su un sistema meccanico

- **Forze interne:** scambiate tra le parti del sistema, hanno risultante e momento risultante nulli, non influenzano il moto del corpo rigido
- **Forze esterne:** agenti dall'esterno sul sistema
 - Forze attive: concentrate/di massa
 - Forze di reazione vincolare

Per un corpo rigido sottoposto ad un sistema di forze di risultante f e momento risultante μ rispetto ad un qualsiasi punto Q di esso, il lavoro elementare nello spostamento rigido è espresso da

$$dW = f^T dp + \mu^T \omega dt$$

Principio dei lavori virtuali

Legame tra forze/momenti γ e forze/coppie τ



principio dei lavori virtuali

- Si considerano spostamenti infinitesimi δq (o “virtuali”, cioè che soddisfano tutti gli eventuali vincoli presenti) all’equilibrio
 - senza variazione di energia cinetica (accelerazioni nulle)
 - senza dissipazione (velocità nulle)
- Il *lavoro virtuale* δW è il lavoro compiuto da tutte le forze/coppie ζ agenti sul sistema per uno spostamento virtuale: $\delta W = \zeta^T \delta q$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema deformabile, con vincoli bilaterali e lisci, sia in equilibrio in una data configurazione è che il lavoro delle forze esterne eguagli il lavoro interno per qualunque insieme di spostamenti virtuali.

Principio dei lavori virtuali

In equilibrio (statico o dinamico), la risultante delle forze agenti sull'elemento i -esimo deve essere nulla, quindi:

$$\delta W = \sum f_i^T \delta x = 0 \quad (\text{Lavoro relativo ad ogni spostamento virtuale, pari a } 0)$$

La relazione precedente rappresenta una formulazione alternativa della condizione di equilibrio.

Essa si può scrivere come:

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_a + \delta W_h = 0$$

$$\delta W_i = 0 \quad \text{per un sistema in quiete}$$

$$\delta W_h = 0 \quad \text{in assenza di attrito (reazioni vincolari ortogonali alle superfici di contatto)}$$



$$\delta W_a = 0$$

$$\delta W_a = \zeta^T \delta q = 0$$

Statica

Per quanto riguarda le coppie applicate ai giunti, ad esse è associato il lavoro elementare:

$$dW_\tau = \tau^T dq$$

Per quanto concerne le forze γ esplicate dall'organo terminale, separando i contributi di forza f e di momento μ (rispetto all'origine della terna utensile) relativi alle direzioni di spazio operativo, il lavoro elementare risulta:

$$dW_\gamma = f^T dp + \mu^T \omega dt$$

con dp spostamento lineare e ωdt spostamento angolare.

Statica

Dalla cinematica differenziale: $v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$ $J = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix}$

$$dW_\gamma = f^T dp + \mu^T \omega dt$$

$$dW_\gamma = f^T J_p(q) dq + \mu^T J_o(q) dq = \gamma^T J(q) dq$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} f^T \\ \mu^T \end{bmatrix}$$

forze esplicate dall'organo terminale

$$\begin{cases} \delta W_\tau = \tau^T \delta q \\ \delta W_\gamma = \gamma^T J(q) \delta q \end{cases} \quad \text{lavori virtuali associati ai due sistemi di forze}$$

Per il principio dei lavori virtuali, il manipolatore è in equilibrio statico se e solo se vale la relazione $\delta W_\tau = \delta W_\gamma$, $\forall \delta q$ dalla quale segue la relazione:

$$\tau = J^T(q)\gamma$$

Dualità Cineto-Statica

$$\tau = J^T(q)\gamma$$

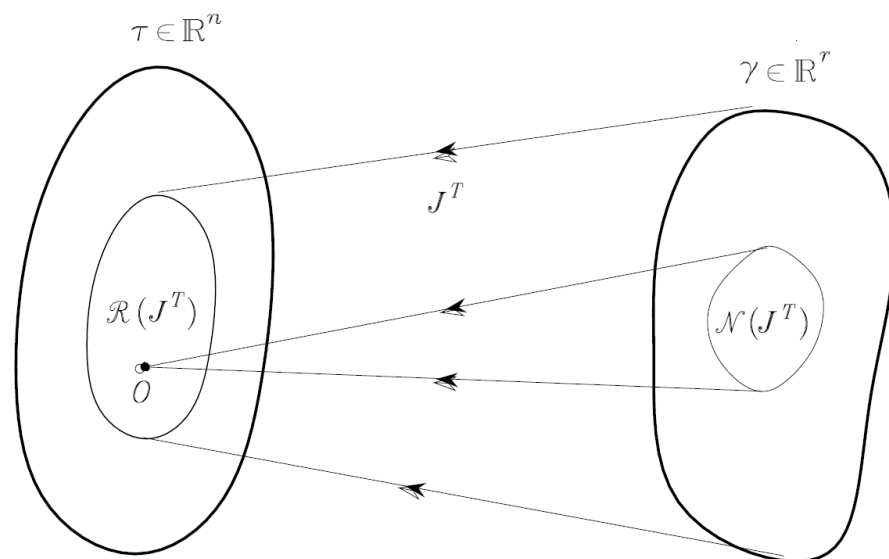
relazione statica

$$v = J(q)\dot{q}$$

eq. cinematica differenziale

- L'immagine di J^T è il sottospazio $\mathcal{R}(J^T)$ in \mathbb{R}^n che individua le coppie ai giunti che possono bilanciare le forze all'organo terminale, nella configurazione assegnata al manipolatore
- Il nullo di J^T è il sottospazio $\mathcal{N}(J^T)$ in \mathbb{R}^r a cui appartengono le forze all'organo terminale che non richiedono alcuna coppia di bilanciamento ai giunti, nella configurazione assegnata al manipolatore

Dualità Cineto-Statica



$$\mathcal{N}(J) \equiv \mathcal{R}^\perp(J^T)$$

$$\mathcal{R}(J) = \mathcal{N}^\perp(J^T)$$

È opportuno osservare che le forze all'organo terminale $\gamma \in \mathcal{N}(J)$ sono interamente assorbite dalla struttura, ovvero le relazioni vincolari sono in grado di bilanciarle esattamente.

Pertanto, un manipolatore in configurazione singolare resta nella postura assegnata qualunque sia la forza γ applicata al suo organo terminale tale che $\gamma \in \mathcal{N}(J)$.

Ellissoide di manipolabilità in velocità

$$\dot{q}^T \dot{q} = 1$$

insieme delle velocità ai giunti a norma unitaria

$$\dot{q} = J^+(q)v$$



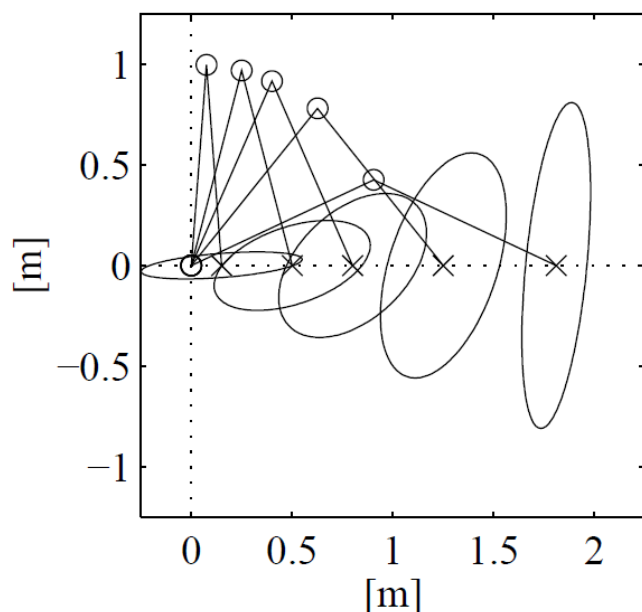
$$v^T [J^{+T}(q)J^+(q)]v = 1$$

$$J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$$



$$v^T [J(q)J^T(q)]^{-1}v = 1$$

ellissoide di manipolabilità in velocità

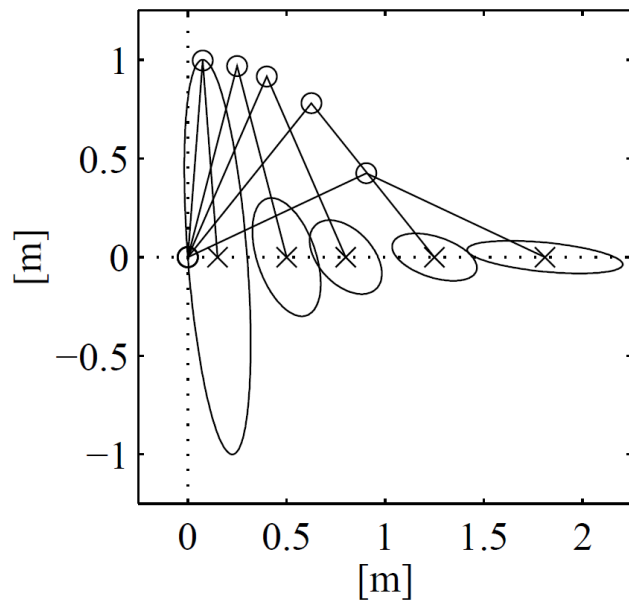


Misura di manipolabilità:

$$w(q) = K\sqrt{\det(JJ^T)}$$

volume dell'ellissoide

Ellissoide di manipolabilità in forza



$$\tau^T \tau = 1 \quad \tau = J^T \gamma$$



$$\gamma^T [J(q)J^T(q)] \gamma = 1$$

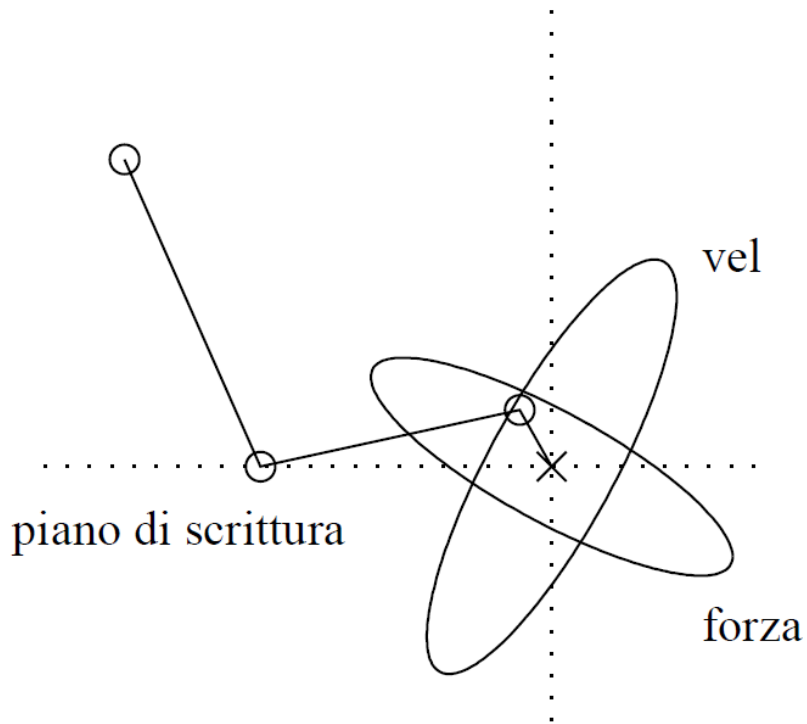
ellissoide di manipolabilità in forza

Gli assi principali dell'ellissoide in forza coincidono con gli assi dell'ellissoide in velocità, mentre le dimensioni di detti assi sono in proporzione inversa.

Pertanto, in accordo con il concetto di dualità velocità/forza, una direzione lungo la quale si ha elevata manipolabilità in velocità è una direzione lungo la quale si ha scarsa manipolabilità in forza, e viceversa.

Esempio:

Scrivere con un braccio su una superficie orizzontale

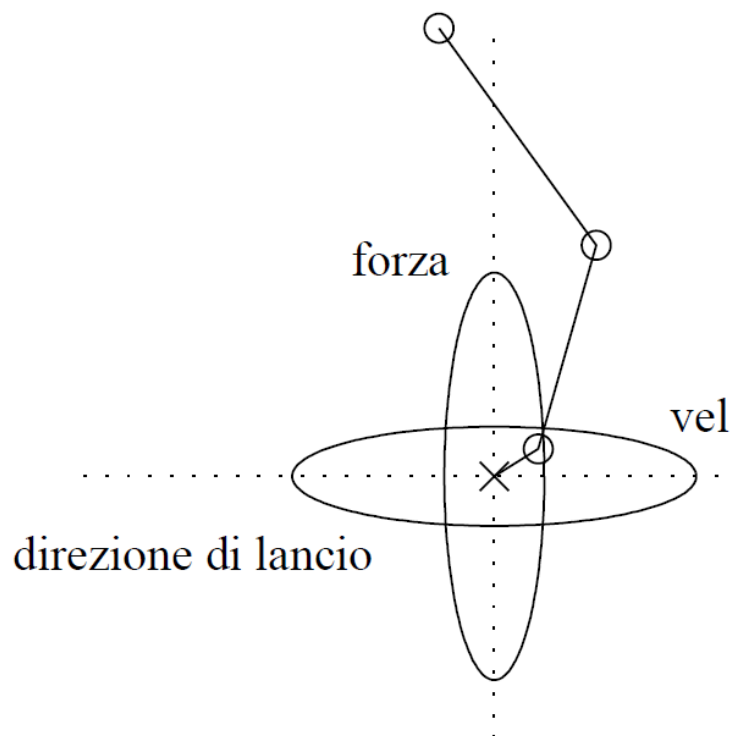


Bisogna controllare finemente la forza verticale (la pressione della penna sul foglio) e la velocità orizzontale (per scrivere con una buona grafia).

Ne consegue che l'ellissoide di manipolabilità in forza tende a disporsi orizzontalmente per una corretta esecuzione del compito.

Corrispondentemente, l'ellissoide di manipolabilità in velocità tende a disporsi verticalmente in perfetto accordo con il compito.

Esempio: Lanciare un peso (palla da Bowling)



In questo compito si ha bisogno di una grande forza verticale (per reggere il peso) ed una grande velocità orizzontale (per lanciare il peso a distanza ragionevole).

Al contrario dell'esempio precedente l'ellissoide di manipolabilità in forza (velocità) tende a disporsi, naturalmente, in maniera verticale (orizzontale), per eseguire il compito con successo.