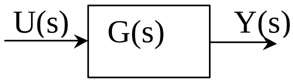
ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

La figura seguente rappresenta una relazione ingresso/uscita in forma grafica.

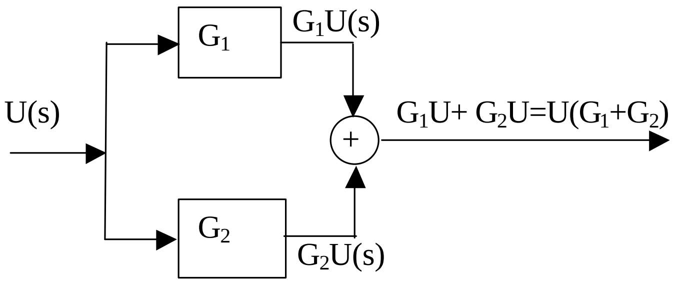


La relazione ingresso-uscita è espressa graficamente attraverso un blocco funzionale. L'ingresso è rappresentato tramite una freccia entrante e l'uscita tramite una freccia uscente. Il legame tra l'ingresso e l'uscita è: $Y(s)=G(s)U(s)$.

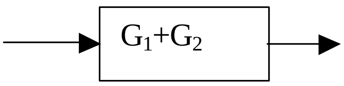
I blocchi elementari possono essere collegati in modo complesso per rappresentare la dinamica di sistemi complessi costituiti da sistemi elementari interconnessi. Di seguito esporremo le operazioni per trasformare un insieme di blocchi interconnessi in un blocco elementare.

Collegamento in parallelo

Il seguente collegamento è detto in parallelo

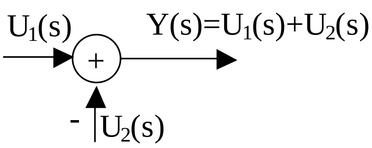


Può essere trasformato nel blocco equivalente



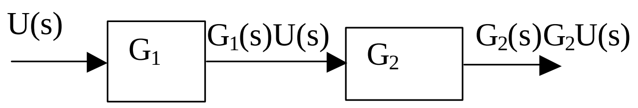
In altre parole blocchi collegati in parallelo sono equivalenti ad un blocco dato dalla somma dei blocchi.

Il "cerchietto con il segno +" si chiama *nodo sommatore*. Esso effettua la somma delle variabili rappresentate dalle frecce entranti. Le variabili sono intese positive a meno che non vi sia un segno negativo esplicito come nella figura seguente:



Collegamento in serie

Il seguente collegamento è detto in serie o in cascata:



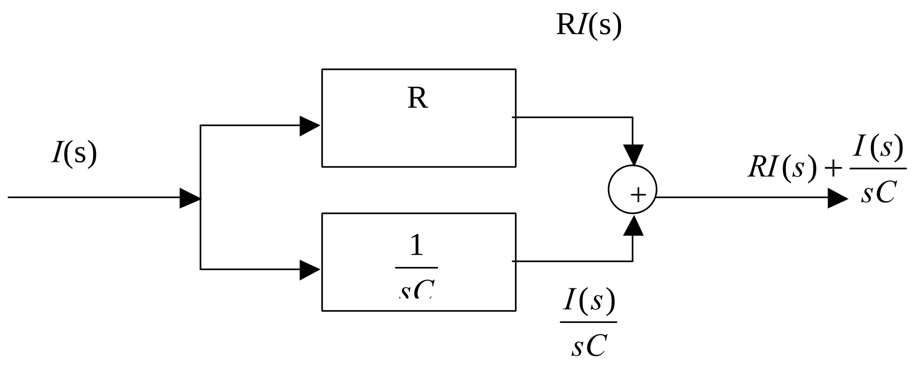
Può essere trasformato nel seguente blocco equivalente:

In altre parole blocchi collegati in serie sono equivalenti ad un blocco che è il prodotto dei blocchi.

Esempio: Considerato il circuito RC serie visto in precedenza, si è visto che

$$V(s) = RI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = \left(R + \frac{1}{sC} \right) I(s)$$

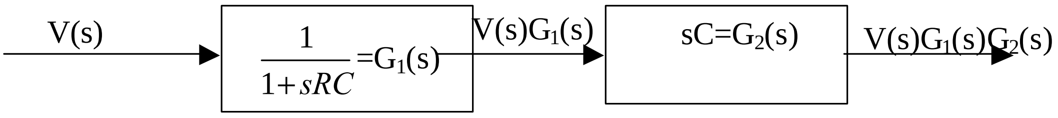
Si può quindi rappresentare con lo schema a blocchi seguente



oppure, orientando il sistema in un altro modo

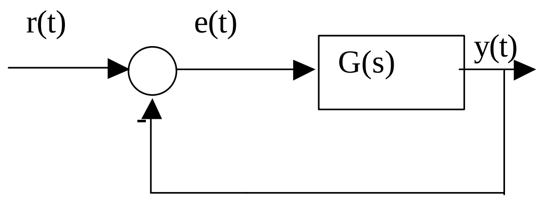
$$I(s) = \frac{V(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{V(s)sC}{sRC + 1} = V(s)\frac{1}{1 + sRC}sC$$

Lo schema a blocchi diventa



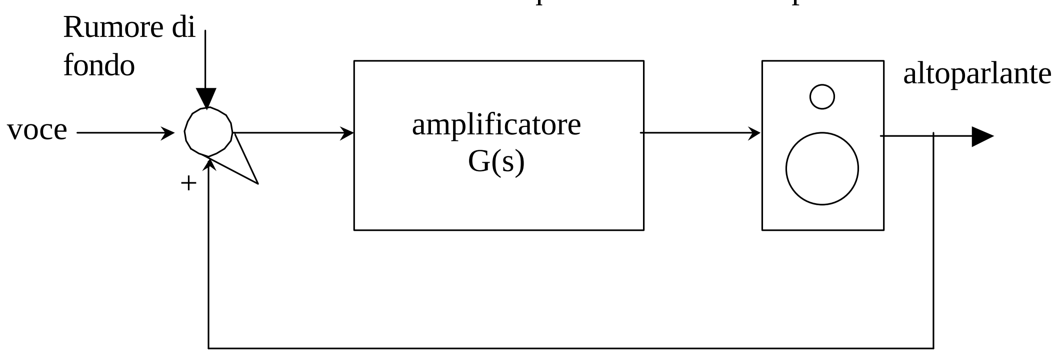
Collegamento contenente un <u>ramo di retroazione</u>

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi



L'aspetto fondamentale di tale sistema è la presenza di un *ramo di retroazione* o di *feedback* che "riporta indietro" la variabile d'uscita. In questo caso l'ingresso del sistema diventa l'errore e(t)=r(t)-y(t). Spesso i sistemi in retroazione presentano il vantaggio di ridurre a zero o a valori piccoli l'errore e(t). Ciò significa che la variabile y(t) *insegue* il valore di riferimento r(t). Un sistema in retroazione "funziona" anche se si ha una G+ΔG (anziché la sola G(s)), ossia il sistema è in grado di funzionare anche in presenza di incertezza sulla funzione di trasferimento. La retroazione in genere è negativa (si dice controreazione) ed esplica così un'azione sull'ingresso che tende ad opporsi alle variazioni dell'uscita. Si può avere anche una retroazione positiva che in genere produce un sistema instabile o un oscillatore.

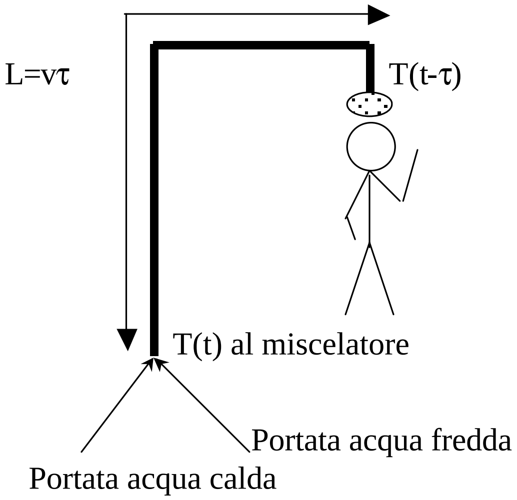
Un esempio dell'effetto di una retroazione positiva è il caratteristico fischio che si produce quando si avvicina un microfono al suo altoparlante: in questo caso si verifica che il segnale audio all'uscita di un altoparlante entra nel microfono generando un "loop" positivo o rigenerativo. In particolare in questo caso il fischio è l'effetto del rumore ad alta frequenza che viene amplificato.

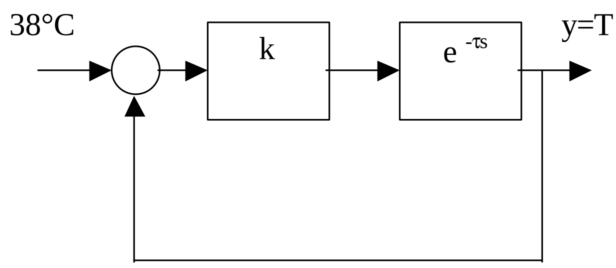


Il segnale che entra nell'amplificatore è la somma della voce voce più il ritorno dall'altoparlante e quindi la G(s) amplificherà la sua stessa uscita generando una uscita ancora più alta e così via. E' evidente che il sistema è instabile. In assenza di parlato, sarà il rumore di fondo ad essere amplificato e si udirà un fischio.

La retroazione, anche quella negativa, può generare un sistema con dinamica instabile. Un esempio si ha nel caso della regolazione di temperatura effettuata da un uomo sotto la doccia. In tal caso il comportamento dell'uomo realizza una retroazione negativa in quanto aumenta la portata di acqua calda se percepisce una temperatura bassa e viceversa. A causa del ritardo con cui una variazione di temperatura imposta tramite il miscelatore raggiunge l'uomo (il ritardo è dovuto al tempo di propagazione dell'acqua nei tubi) l'uomo tende ad un eccesso di correzione perché non sente immediatamente l'effetto della sua azione. L'eccesso di correzione richiede una successiva correzione in senso contrario. Anche tale correzione può essere eccessiva per i motivi già detti per cui si innesca un ciclo d'oscillazioni (*catastrofe di regolazione*).

Modello e schema a blocchi della regolazione di temperatura nel caso di una doccia

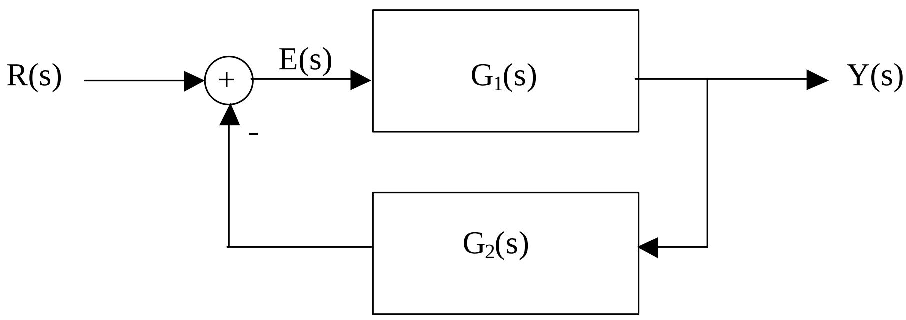




Schema a blocchi

Sia 38°C la temperatura desiderata e T la temperatura reale dell'acqua. La temperatura T al miscelatore raggiunge l'uomo dopo aver percorso la distanza L a velocità v, cioe' dopo il tempo τ=L/v. Quindi tra correzione ed effetto esiste un ritardo puro che può essere rappresentato dalla funzione di trasferimento $e^{-\tau s}$.

Calcoliamo ora la fdt equivalente nel caso generale in cui nel ramo di retroazione è presente una fdt $G_2(s)$ come in figura.



Si ha che:

Ys)=E(s)G_1(s) e poichè E(s)=R(s)-G_2(s)Y(s) risulta:

Y(s)=[R(s)-G_2(s)Y(s)]G_1(s)

da cui, risolvendo rispetto a Y(s):

$$Y(s)=\frac{G_1}{1+G_1G_2}R(s)$$

Nel caso di retroazione positiva (ramo di retroazione entrante col segno + nel nodo sommatore) la fdt equivalente è:

$$Y=\frac{G_1}{1+G_1G_2}R$$

SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

Si definisce *ordine* di un sistema l'ordine del polinomio al denominatore della funzione di trasferimento $G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$, cioè l'ordine è il grado del polinomio D(s). Equivalentemente, l'ordine corrisponde al grado massimo con cui compare la derivata dell'uscita nella equazione differenziale lineare a coefficienti costanti che descrive un sistema LTI. Per esempio, considerato il circuito RC visto in precedenza, supponiamo di essere interessati alla tensione $v_C(t)$ ai capi del condensatore in risposta alla tensione d'ingresso e(t)=v(t). Dall'Elettrotecnica è noto che un qualsiasi elemento circuitale può essere espresso tramite una grandezza chiamata *impedenza operazionale*, indicata normalmente con Z, che è pari a

$$Z=R+\frac{1}{sC}+sL$$

dove R,C,L sono rispettivamente la resistenza, la capacità e l'induttanza.

La definizione di impedenza permette di sostituire alle equazioni integro-differenziali una equazione algebrica, poiché risulta sempre valida la legge di Ohm generalizzata

$$V = Z\ I$$

Naturalmente il concetto d'impedenza operazionale deriva dalla trasformazione secondo Laplace delle equazioni differenziali del prim'ordine descrittive della dinamica di un condensatore e un induttore. Applicando la regola del partitore di tensione possiamo agilmente ricavare la relazione tra V(s) e V_C(s)

$$V_c(s)=\frac{V(s)}{sC}\frac{1}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{V(s)}{1+sRC}$$

da cui, indicando con τ = RC la costante di tempo, si ricava la seguente fdt

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{1+\tau s}$$

Si tratta della forma standard di un sistema del primo ordine (il grado del denominatore è pari a 1). Si osservi che nella forma standard G(0)=1. G(0) si dice *guadagno statico* del sistema. Chiariamo brevemente il significato di guadagno statico. Considerata una generica sinusoide di pulsazione $\omega=2\pi f$ è noto che diminuendo la frequenza il segnale diventa sempre più lentamente variabile. Al limite per $\omega\to 0$ la sinusoide è così lentamente variabile da diventare praticamente un segnale costante. Assumendo $s=j\omega$, per $\omega\to 0$ risulta $s\to 0$ per cui, in condizioni lentamente variabili, $G(s)\to G(0)$ e G(0) rappresenta il guadagno statico, cioè stabilisce una relazione tra l'ingresso e l'uscita uscita a regime. Questo concetto verrà ripreso e chiarito successivamente quando si illustrerà la funzione di risposta armonica.

Nel dominio del tempo un sistema del prim'ordine in forma standard è descritto dalla equazione differenziale

$$Y(s) = U(s)\frac{1}{1+\tau s} \to U(s) = Y(s) + \tau s Y(s) \to u(t) = y(t) + \tau\frac{dy}{dt} \, oppure \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}y(t) + \frac{1}{\tau}u(t)$$

Risolvendo l'omogenea associata la soluzione è

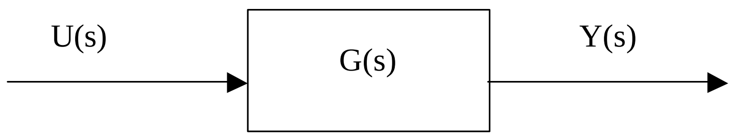
$$y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

che rappresenta un'evoluzione libera perché è il risultato della sola condizione iniziale y(0) e non dell'ingresso u(t). Dall'Analisi si sa che la soluzione di un'equazione differenziale non omogenea è pari alla somma della soluzione generale più una soluzione particolare; pertanto la soluzione completa è

$$y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = y_L(t)+y_p(t)$$

in cui l'integrale rappresenta l'evoluzione forzata (cioè dipendente dall'ingresso).

Abbiamo visto che la fdt G(s) è uno strumento di descrizione/previsione del comportamento ingresso-uscita di un sistema lineare tempoinvariante.



Antitrasformando la relazione Y(s)=G(s)U(s):

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

I segnali canonici considerati hanno le seguenti trasformate:

Funzione f(t)	*Trasformata di Laplace*
impulso δ(t)	1
gradino 1(t)	$\frac{1}{s}$
rampa unitaria t 1(t)	$\frac{1}{s^2}$
rampa parabolica $\frac{t^2}{2}$ 1(t)	$\frac{1}{s^3}$
cosωt 1(t)	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
sinωt 1(t)	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

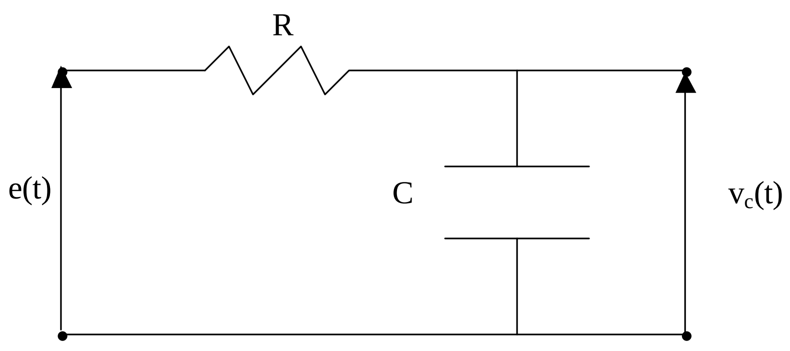
La risposta all'impulso del sistema è la trasformata di Laplace dell'impulso, cioè L[δ(t)]=1. Quindi la risposta impulsiva è

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[1G(s)]=g(t)$$

La risposta impulsiva è una caratterizzazione completa del sistema perché fornisce la funzione di trasferimento G(s)=L[g(t)], cioè la sua equazione differenziale nel tempo.

Esercizio

Considerato un circuito RC serie, si consideri come ingresso del sistema la tensione e(t) e come uscita la tensione $v_c(t)$.



Si è visto che questo sistema ha funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{1}{1+\tau s}$ dove $\tau=RC$.

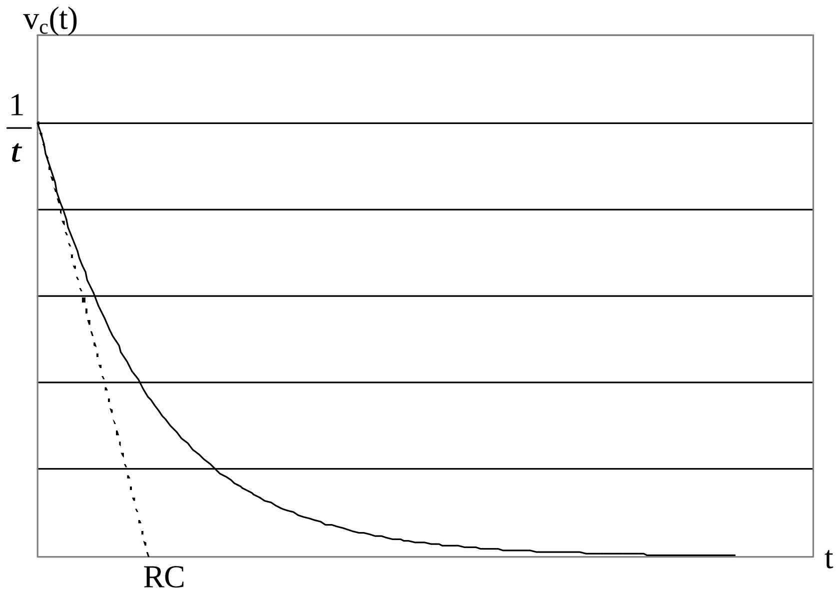
Essendo nota la G(s) si può trovare la risposta del sistema a qualunque ingresso. Supponendo che l'ingresso sia un impulso si ottiene che U(s)=1 e quindi $Y(s)=G(s)=V_c(s)$ cioè la risposta è l'antitrasformata della funzione di trasferimento. In questo caso:

$$v_c(t)=L^{-1}[V_c(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{1+\tau s}\right]$$

Poichè $L[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$ segue che, evidenziando τ, la antitrasformata risulta

$$G(s)=\frac{1}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=v_c(t)$$

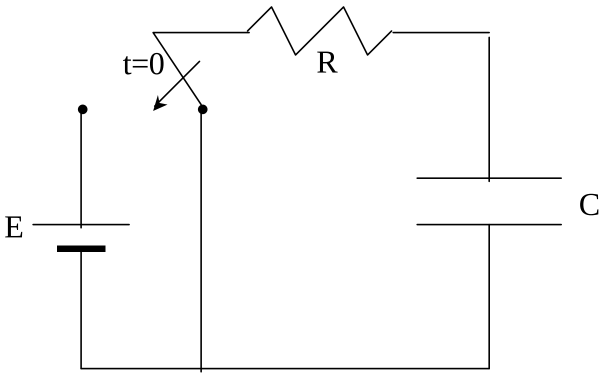
cioè è un andamento esponenziale tendente asintoticamente a zero per $t\to\infty$. Assumendo un impulso di tensione $e(t)=\delta(t)$, la funzione $v_c(t)$ raffigurata di seguito



rappresenta l'evoluzione libera a partire da 0^+ (poiché il segnale d'ingresso è nullo a partire da 0^+. L'impulso ha infatti cambiato la condizione iniziale del sistema (si è supposto che le condizioni iniziali siano nulle e che l'impulso sia stato applicato a t=0). In altre parole passando da 0^- a 0^+ il sistema cambia le sue condizioni per effetto dell'impulso.

L'impulso è un particolare ingresso che è diverso da zero solo per un istante; si noti che se la funzione d'ingresso non è impulsiva non si può avere una variazione finita in un intervallo infinitesimo $(0^-,0^+)$.

Considerato un ingresso a gradino e(t)=E1(t) che, per esempio, può rappresentare un interruttore che viene chiuso all'istante t=0, si ottiene:

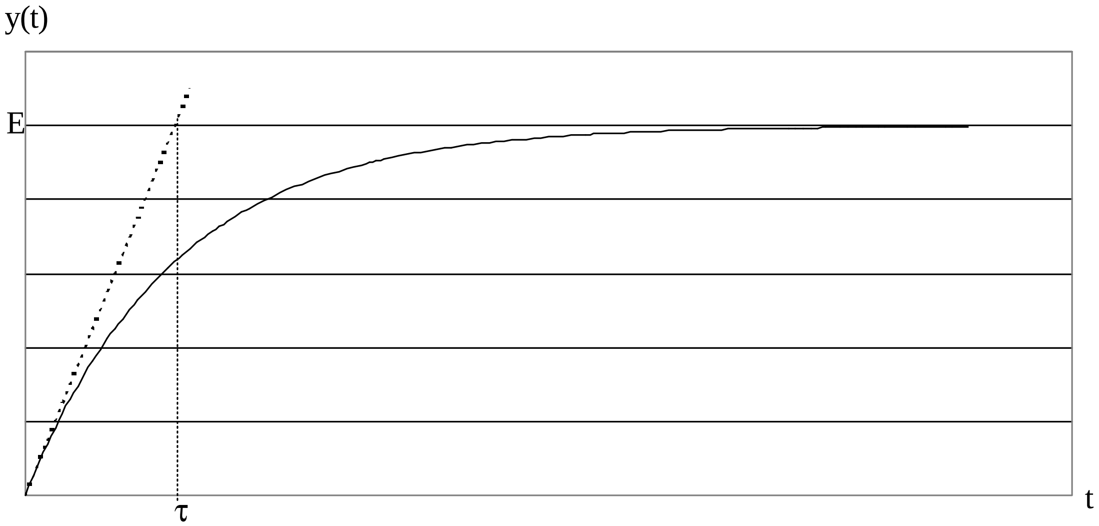


$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{1}{1+\tau s}\frac{E}{s}$$

Per antitrasformare secondo Laplace la Y(s) si può applicare questo ragionamento: la funzione di trasferimento è moltiplicata per una costante E e poi per il termine $\frac{1}{s}$ che corrisponde ad un'operazione di integrazione in t. Per cui integrando la antitrasformata di $\frac{1}{1+\tau s}$ (cioè $\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$) e moltiplicando per E (proprietà di linearità):

$$y(t)=\int_0^t \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t'}{\tau}}dt' = -E\left[e^{\frac{-t}{\tau}}\right]_0^t = E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

che rappresenta la carica di un condensatore; graficamente si ha che



La derivata di y(t)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

calcolata nell'origine rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva, cioè $\dot{y}(0)=\frac{E}{\tau}$.

Questo significa che se la pendenza della retta è $\frac{E}{\tau}$ allora dopo il tempo τ la retta assume il valore E.

La costante di tempo di un sistema di primo ordine quindi misura la velocità del sistema. Infatti, misurando il tempo t come multiplo di τ si ottiene che:

per t=4τ → y(t) = 0.98E

per t=3τ → y(t) = 0.95E

I tempi 3τ e 4τ sono anche detti *tempi di assestamento (settling time)* rispettivamente al 5% e al 2% poiché in quell'istante l'uscita raggiunge rispettivamente il 95% ed il 98% del valore a regime.

Come precedentemente visto, il valore a regime si calcola tramite il guadagno statico, cioè il valore della G(s) per s=0; infatti

$$G(0) = \frac{1}{1+\tau 0} = 1 \text{ per cui } Y(0) = G(0)E = E$$