Corso di Controllo dei Robot
Controllo di Forza

Paolo Lino

Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Controllo di Forza

Controllo di cedevolezza

$$B(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+F\dot{q}+g(q)=u-J^{T}(q)h$$

Utilizziamo una legge di controllo PD con compensazione di gravità nello spazio operativo

$$u=g(q)+J_{A}^{T}(q)K_{P}\tilde{x}-J_{A}^{T}(q)K_{D}J_{A}(q)\dot{q}$$

All'equilibrio stavolta, con $h\neq 0$ **:**

$$\boldsymbol{J}_{A}^{T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}_{P}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}^{T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Ricordiamo che}\\ J=T_{A}J_{A}\end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$h=\begin{bmatrix}f\\ \mu\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{K}_{P}^{-1}\boldsymbol{T}_{A}^{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}=\boldsymbol{K}_{P}^{-1}\boldsymbol{h}_{A}$$

Vettore equivalente delle forze di contatto

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q)\dot{q} \qquad v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

$$v = \begin{bmatrix} I & o \\ o & T(\phi) \end{bmatrix} \dot{x} = T_A(\phi)\dot{x} \qquad J = T_A(\phi) J_A$$

$$\begin{cases} T_A^T \gamma = \gamma_A \\ T_A^T h = h_A \end{cases} \qquad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}_P^{-1} \boldsymbol{T}_A^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{h} = \boldsymbol{K}_P^{-1} \boldsymbol{h}_A$$

- $\boldsymbol{K}_P^{-1} \equiv$ *cedevolezza* del controllo
  - ⋆ lineare nei riguardi di $\boldsymbol{f}$
  - ⋆ torsionale nei riguardi di $\boldsymbol{\mu}$ **Dipende dalla configurazione**
- Se $\boldsymbol{h} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{J}^T) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$

Modello semplice ma significativo del contatto:
Ambiente elasticamente cedevole e disaccoppiato

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_f & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{K}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\omega} dt \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{K} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\omega} dt \end{bmatrix}$$

K **semi-definita positiva**

$$= \boldsymbol{K}\boldsymbol{T}_A(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

$$dx = x - x_e$$

posizione di equilibrio dell'ambiente non deformato

$$h_A = T_A^T h \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{h}_A = \boldsymbol{T}_A^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}_A(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

$$= \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)$$

- **La matrice K_A definisce la *rigidezza* dell'ambiente. Ove è possibile definire la sua inversa, essa rappresenta la *cedevolezza* dell'ambiente. E' detta *cedevolezza passiva* perché descrive una caratteristica intrinseca dell'ambiente nello spazio operativo**

- **Ricordando che essa è *semidefinita positiva,* ne consegue che il concetto di cedevolezza non è caratterizzato, a livello globale, su tutto lo spazio operativo, ma va opportunamente specificato per quelle direzioni (l'immagine di K_A) lungo le quali il moto dell'organo terminale è vincolato dall'ambiente**

- **La matrice K_P^{-1} rappresenta una cedevolezza *attiva,* poiché è il risultato dell'applicazione di una opportuna legge di controllo di posizione**

Con il modello di ambiente

$$h_A = T_A^T h(x) K T_A(x) dx = K_A(x)(x - x_e)$$

La relazione $\tilde{x} = K_P^{-1} T_A^T(x) h = K_P^{-1} h_A$

Diventa $\tilde{x} = K_P^{-1} K_A(x)(x - x_e)$

All'equilibrio :

$$x_\infty = \left(I + K_P^{-1} K_A(x)\right)^{-1} (x_d + K_P^{-1} K_A(x) x_e)$$

$$h_{A\infty} = (I + K_A(x) K_P^{-1})^{-1} K_A(x)(x_d - x_e)$$

$$x_\infty = \left(I + K_P^{-1} K_A(x)\right)^{-1} \left(x_d + K_P^{-1} K_A(x) x_e\right)$$

- **La posizione di equilibrio dipende dalla posizione di riposo per l'ambiente e dalla posizione desiderata imposta dal sistema di controllo del manipolatore**
- **L'interazione dei due sistemi (ambiente e manipolatore) è influenzata dal peso associato alle rispettive caratteristiche di cedevolezza**
- **E' possibile agire sulla cedevolezza attiva in maniera tale da far dominare il manipolatore sull'ambiente o viceversa**
- **Tale dominanza può essere *selettiva* rispetto alle direzioni (valori elevati degli elementi di K_P corrispondenti alle direzioni in cui si desidera che l'ambiente ceda, e viceversa)**

$$h_{A\infty} = (I + K_A(x)K_P^{-1})^{-1}K_A(x)(x_d - x_e)$$

- **Considerando l'espressione della forza di contatto all'equilibrio, si riconosce l'opportunità di accordare le caratteristiche di cedevolezza del manipolatore a quelle dell'ambiente, che può presentare caratteristiche differenti lungo direzioni diverse dello spazio operativo**
- **Lungo direzioni in cui l'ambiente presenta rigidezza elevata è opportuno rendere il manipolatore cedevole affidando allo stesso il compito di graduare l'intensità dell'interazione mediante una scelta opportuna della posizione desiderata e viceversa**

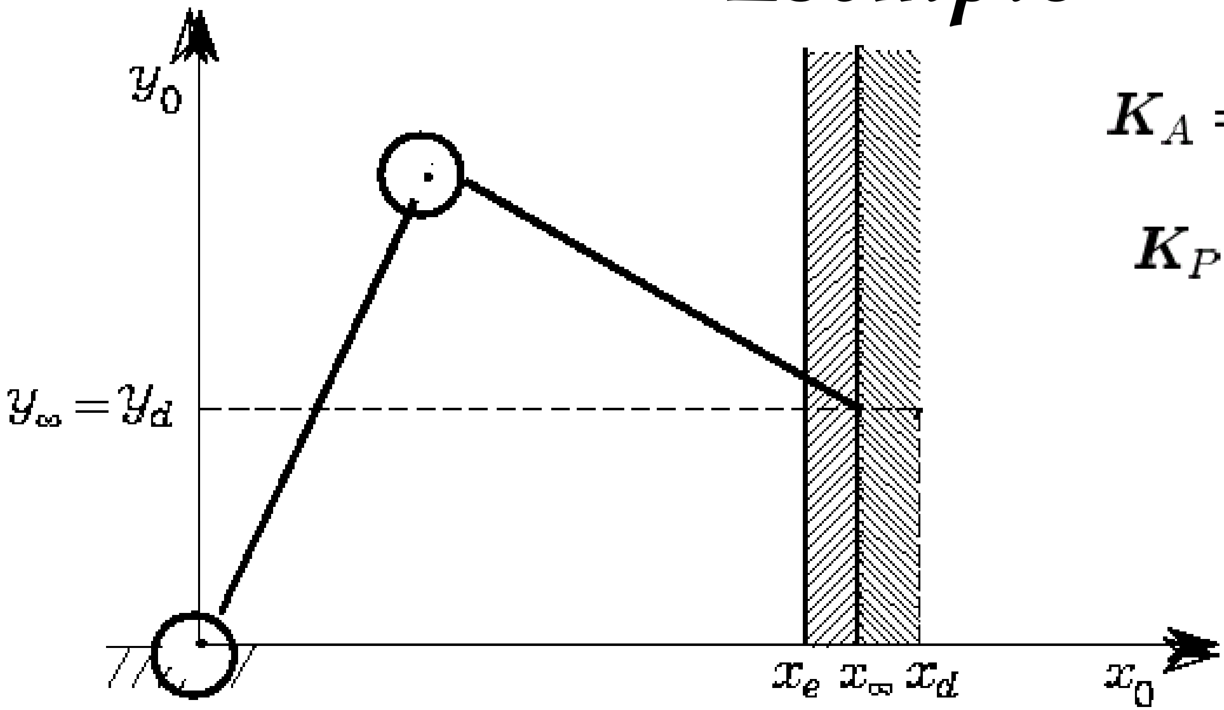
$$x_\infty = \left(I + K_P^{-1} K_A(x)\right)^{-1} \left(x_d + K_P^{-1} K_A(x) x_e\right)$$

$$h_{A\infty} = (I + K_A(x) K_P^{-1})^{-1} K_A(x)(x_d - x_e)$$

- **Ambiente rigido e manipolatore cedevole:** $x_\infty = x_e$**, il manipolatore genera una forza dipendente da** K_P **che può essere specificata mediante la scelta della componente di** $(x_d - x_e)$ **lungo la direzione di interesse**
- **Ambiente cedevole e manipolatore rigido:** $x_\infty = x_d$**, è l'ambiente a generare una forza elastica lungo le direzioni di interesse**

L'errore di posa del manipolatore tende a zero lungo le direzioni in cui l'ambiente cede, mentre la posa dell'organo terminale tende a coincidere con la posa di riposo dell'ambiente nelle direzioni in cui è il manipolatore a cedere

Esempio



$$\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{K}_f = \mathrm{diag}\{k_x, 0\}$$

$$\boldsymbol{K}_P = \mathrm{diag}\{k_{Px}, k_{Py}\}$$

All'equilibrio :

$$\boldsymbol{p}_\infty = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{Px}x_d + k_x x_e}{k_{Px} + k_x} \\ y_d \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_\infty = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{Px}k_x}{k_{Px} + k_x}(x_d - x_e) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_\infty = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{Px}x_d + k_x x_e}{k_{Px} + k_x} \\ y_d \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_\infty = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{Px}k_x}{k_{Px} + k_x}(x_d - x_e) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\star$ se $k_{Px}/k_x \gg 1$ **Il manipolatore domina sull'ambiente (cedevolezza passiva)**

$$x_\infty \approx x_d \qquad f_{x\infty} \approx k_x(x_d - x_e)$$

$\star$ se $k_{Px}/k_x \ll 1$ **L'ambiente domina sul manipolatore (cedevolezza attiva)**

$$x_\infty \approx x_e \qquad f_{x\infty} \approx k_{Px}(x_d - x_e)$$