

*Corso di Controllo dei Robot*  
*Cinematica - Parte 2*

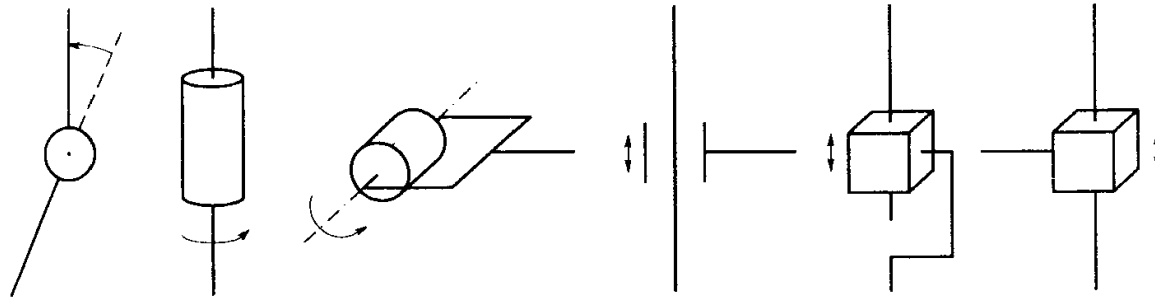
*Paolo Lino*

*Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)*

---

## *Cinematica diretta*

- Un manipolatore è costituito da un insieme di corpi rigidi (bracci) connessi in cascata tramite coppie cinematiche (giunti).
- Si assume che ad ogni giunto corrisponda un grado di mobilità della struttura. Ad ogni giunto inoltre viene associata una variabile detta *variabile di giunto*.
- I giunti possono essere fondamentalmente di due tipi: giunti di rotazione o *rotoidali* e giunti di traslazione o *prismatici*.

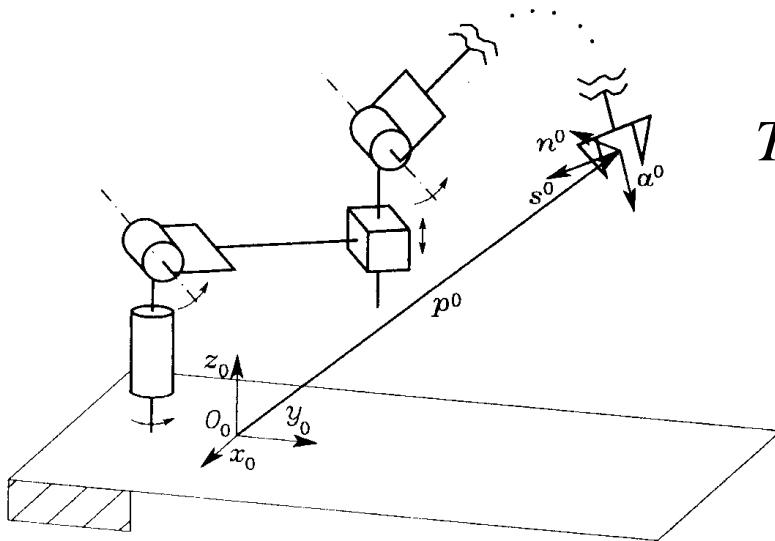


GIUNTI ROTOIDALI

GIUNTI PRISMATICI

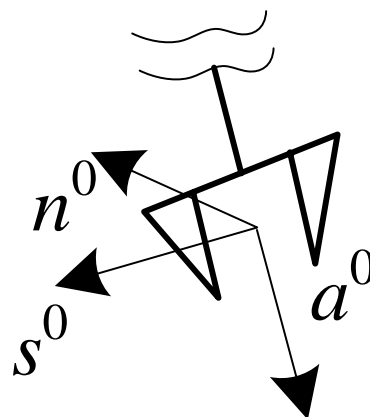
# Cinematica diretta

- Si consideri un manipolatore costituito da  $n + 1$  bracci connessi in cascata (catena aperta) tramite  $n$  giunti.
- Obiettivo della cinematica diretta è la determinazione della posizione e orientamento dell'organo terminale del manipolatore, noti i valori che assumono le variabili di giunto per ottenere detta posizione ed orientamento.



$$T^0(q) = \begin{bmatrix} n^0(q) & s^0(q) & a^0(q) & p^0(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

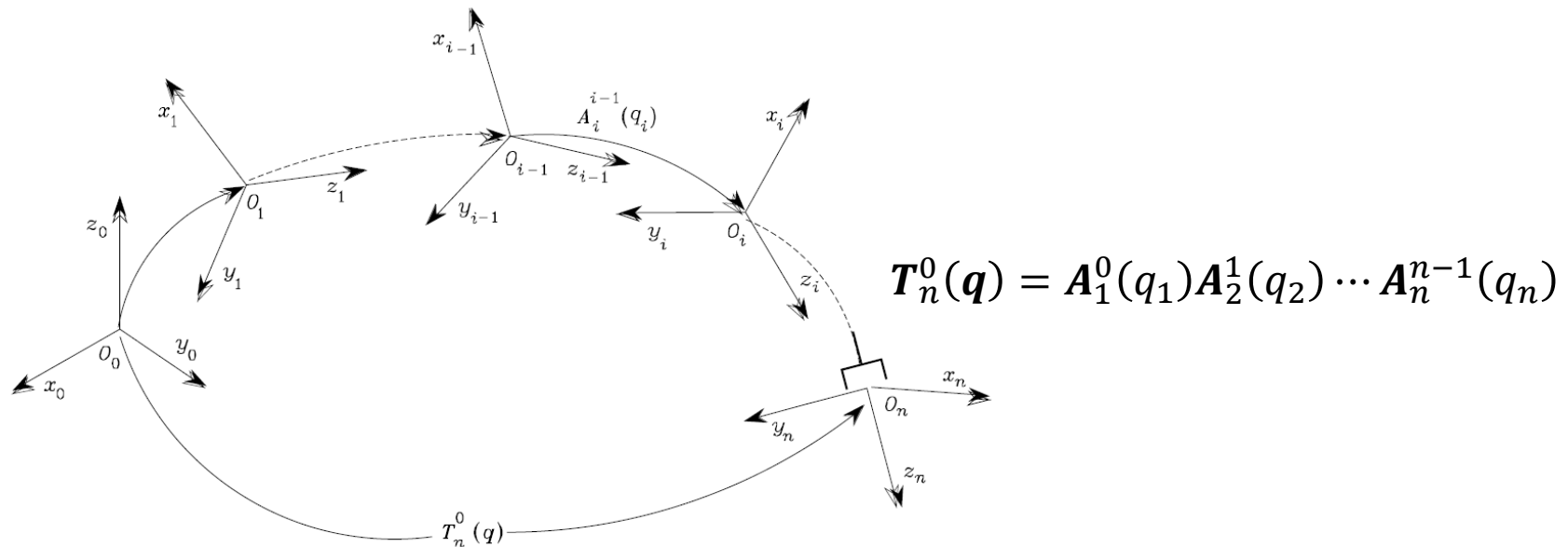
- La terna  $O_0 - x_0y_0z_0$  è detta *terna base*. La terna solidale all'organo terminale, detta *terna utensile*, si sceglie in maniera conveniente di caso in caso.
- Con riferimento ad un organo pinza, l'origine della terna utensile si pone al centro della pinza,
  - il versore  $a$  (avvicinamento) si sceglie nella direzione d'avvicinamento ad un oggetto,
  - il versore  $s$  (scivolamento) si sceglie normale ad  $a$  nel piano di scorrimento degli elementi prensili,
  - il versore  $n$  (normale) si sceglie in modo da completare la terna e renderla levogira.



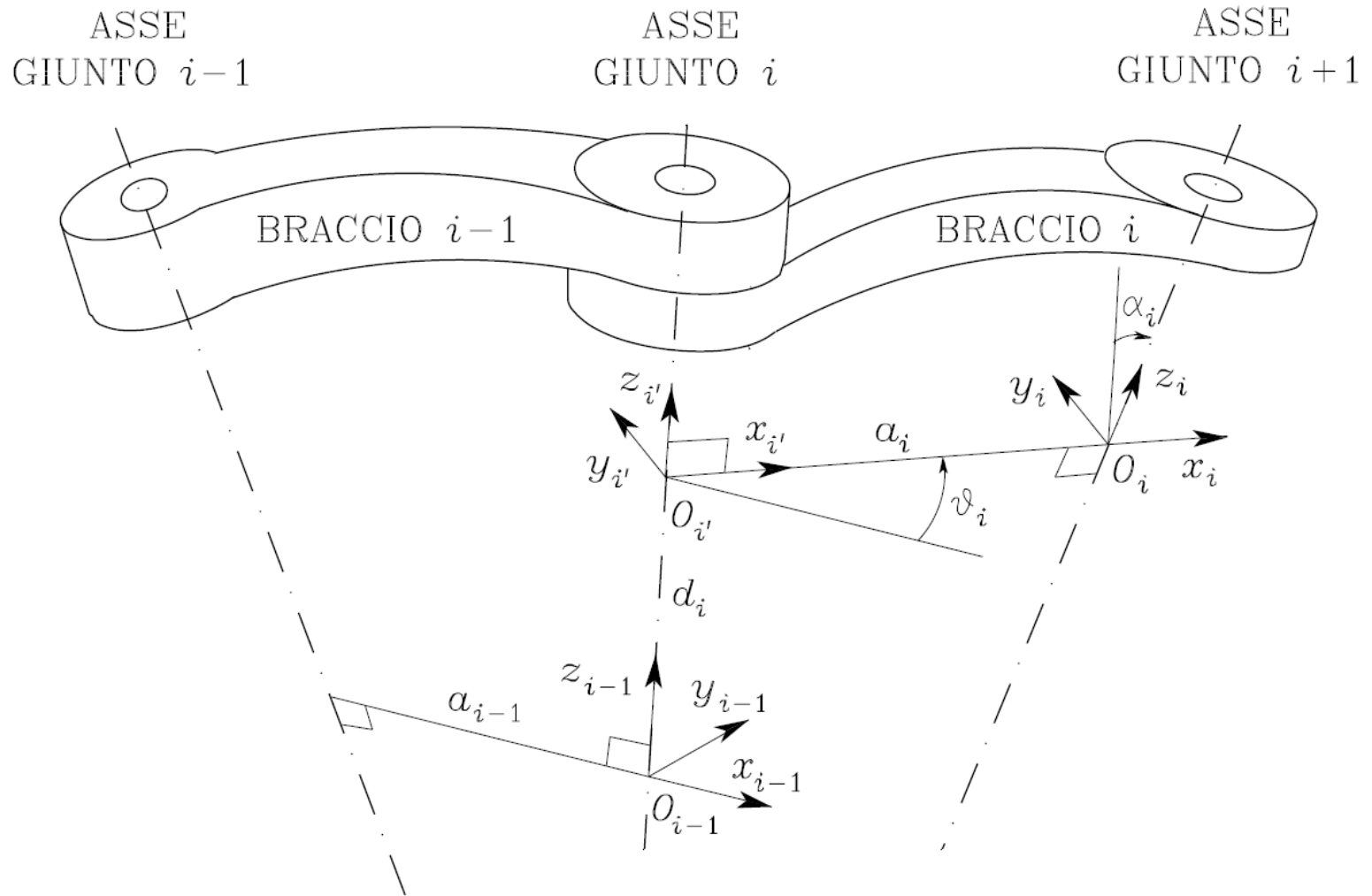
# Cinematica diretta

## Computo della cinematica diretta:

- Si considera isolatamente il problema della descrizione dei legami cinematici tra bracci consecutivi (occorre definire una terna solidale a ciascun braccio)
- Si risolve in maniera ricorsiva il problema della descrizione complessiva della cinematica del manipolatore

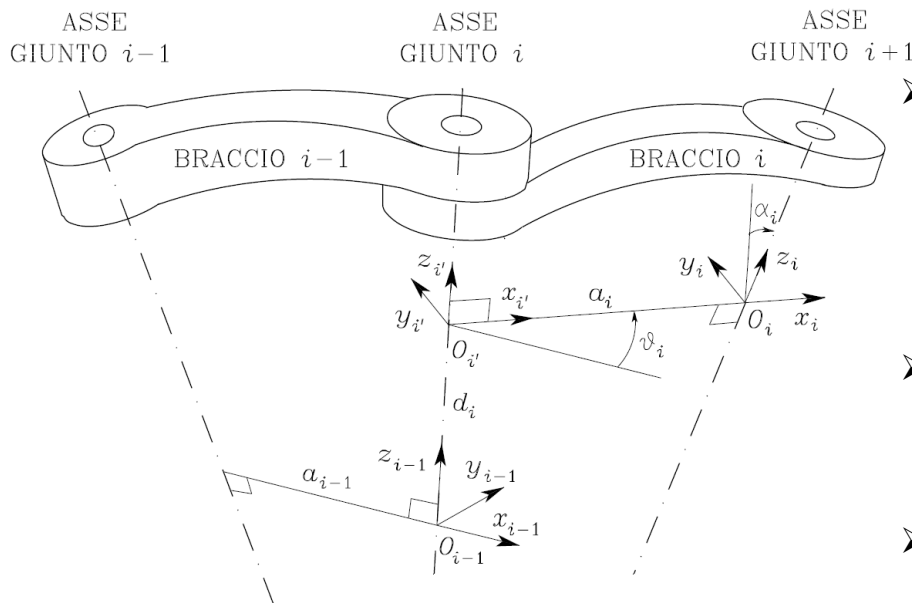


# Convenzione di Denavit - Hartenberg



# Convenzione di Denavit - Hartenberg

- Con riferimento alla figura assumeremo come asse  $i$  l'asse del giunto che connette il braccio  $i - 1$  al braccio  $i$ .
- Per definire la terna  $O_i - x_i y_i z_i$  solidale al braccio  $i$  si opera come segue:



- Si sceglie l'asse  $z_i$  giacente lungo l'asse del giunto  $i + 1$ ;
- Si individua  $O_i$  nel punto d'intersezione tra l'asse  $z_i$  e la normale comune agli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . Indichiamo, poi, con  $O_{i'}$  l'intersezione della normale comune, ricavata prima, con l'asse  $z_{i-1}$ ;
- La normale comune tra due rette sghembe è la retta a cui appartiene il segmento di minima distanza tra le rette.
- Si assume l'asse  $x_i$  diretto lungo la detta normale con verso positivo che va dal giunto  $i$  al giunto  $i + 1$ ;
- Si scegli l'asse  $y_i$  in modo da completare la terna levogira.

# Convenzione di Denavit – Hartenberg

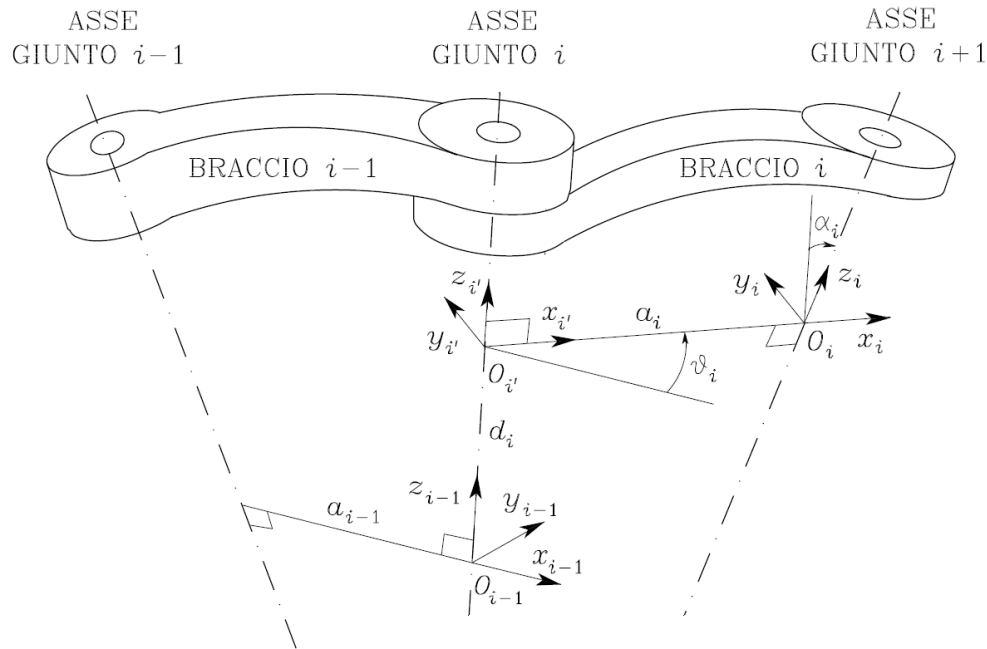
In generale la scelta della terna, secondo questa convenzione, è univoca tranne che per i casi:

- Con riferimento alla terna base, l'origine  $O_0$  e la direzione di  $x_0$  non sono univocamente determinate, essendo mancante il giunto  $O_{-1}$ , quindi non si può determinare la normale comune. Pertanto solo la direzione dell'asse  $z_0$  è determinata. In questo caso  $O_0$  e  $x_0$  si scelgono arbitrari.
- Con riferimento all'ultima terna, poiché non esiste il giunto  $n + 1$ , l'asse  $z_n$  non può essere determinato, mentre  $x_n$  deve essere normale all'asse  $z_{n-1}$ . Poiché generalmente il giunto  $n$  è rotoidale, l'asse  $z_n$  si sceglie parallelo all'asse  $z_{n-1}$ .
- Quando due assi consecutivi sono paralleli, poiché la normale comune tra essi non è univocamente determinata.
- Quando due assi consecutivi si intersecano, poiché è impossibile stabilire il verso di  $x_i$ , essendo la normale comune un punto.

**In tutti questi casi l'indeterminazione può essere sfruttata per semplificare la procedura ricercando, ad esempio, condizioni di allineamento tra assi delle terne consecutive.**



- Una volta definite le terne solidali ai bracci, la posizione e l'orientamento della terna  $i$  rispetto alla terna  $i - 1$  risultano completamente definiti dai seguenti parametri:

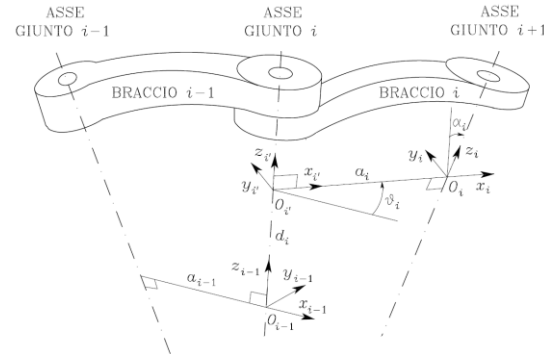


- $a_i$  distanza tra le origini  $O_i$  ed  $O_{i'}$ ;
- $d_i$  coordinata di  $O_{i'}$  sull'asse  $z_{i-1}$
- $\alpha_i$  angolo intorno all'asse  $x_i$  tra l'asse  $z_{i-1}$  e l'asse  $z_i$ , valutato positivo in senso antiorario
- $\vartheta_i$  angolo intorno all'asse  $z_{i-1}$  tra l'asse  $x_{i-1}$  e l'asse  $x_i$ , valutato positivo in senso antiorario

Dei quattro parametri, due ( $a_i, \alpha_i$ ) sono costanti una volta individuata la terna. Degli altri due, solo uno è variabile in dipendenza del tipo di giunto: se il giunto è rotoidale varia  $\vartheta_i$ , se il giunto è prismatico varia  $d_i$ .

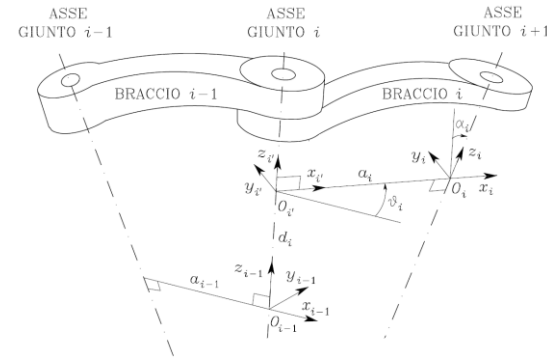
- A questo punto si è in grado di definire la trasformazione di coordinate che lega la terna  $i$  alla terna  $i - 1$ .
1. Si parte dalla terna coincidente con la terna  $i - 1$ ;
  2. Si trasla la terna scelta di  $d_i$  lungo l'asse  $z_{i-1}$ , in modo da fare coincidere le due origini  $O_{i-1}$  ed  $O_{i'}$ , successivamente si ruota la terna traslata di un angolo pari a  $\vartheta_i$  intorno all'asse  $z_{i-1}$ , in modo da fare sovrapporre le due terne. Queste operazioni sono descritte dalla matrice:

$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3. Si trasla la terna ora sovrapposta lungo, l'asse  $x_{i'}$  della quantità  $a_i$  in modo da fare coincidere le due origini  $O_{i-1}$  ed  $O_i$ . Quindi si ruota la terna trasposta di un angolo pari ad  $\alpha_i$  intorno all'asse  $x_{i'}$ , in modo da fare coincidere le terne  $z_i$  e  $z_{i-1}$ . Le operazioni appena eseguite sono rappresentate dalla matrice di rotazione:

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



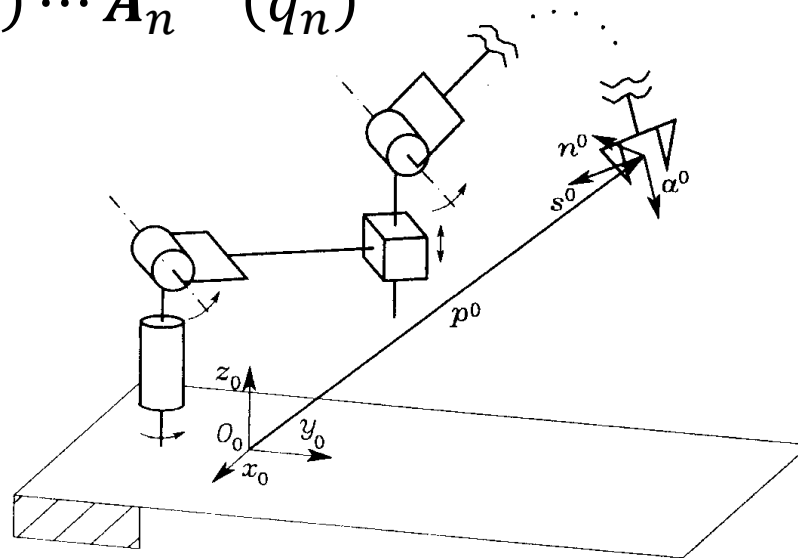
4. Avendo operato due trasformazioni di coordinate definite rispetto alla terna corrente, la trasformazione complessiva si ottiene dalla matrice:

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_{i'}^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{g_i} & -s_{g_i} c_{\alpha_i} & s_{g_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{g_i} \\ s_{g_i} & c_{g_i} c_{\alpha_i} & -c_{g_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{g_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Cinematica diretta

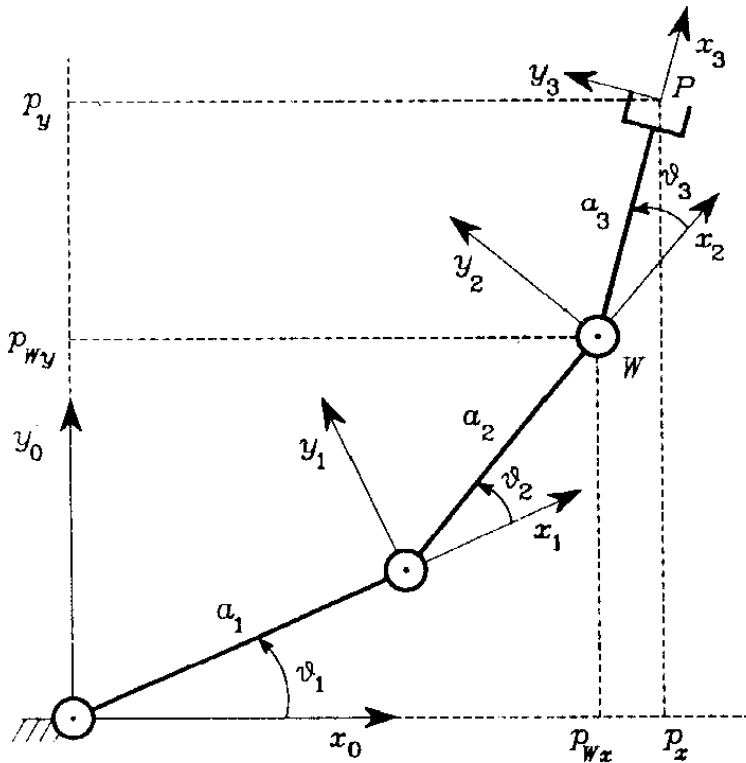
- Definita la singola matrice di trasformazione, possiamo realizzare la procedura di costruzione della funzione cinematica diretta per composizione delle singole trasformazioni di coordinate, in un'unica matrice
- Dal momento che su ogni braccio è stata definita una terna ad esso solidale, la trasformazione di coordinate complessiva che esprime posizione ed orientamento della terna  $n$  rispetto alla terna base è data da:

$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2) \cdots A_n^{n-1}(q_n)$$



# Cinematica di strutture tipiche di manipolazione

## ■ manipolatore planare a tre bracci



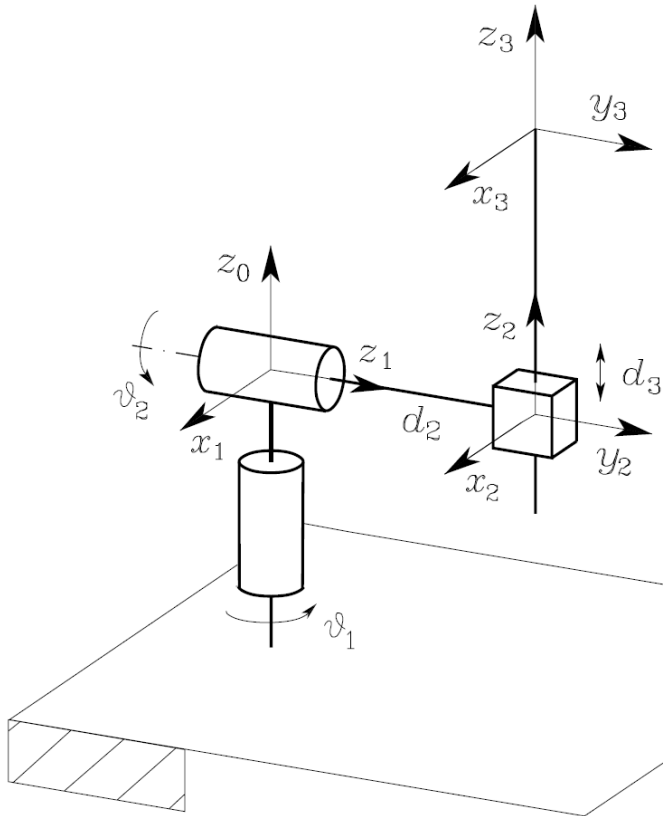
Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	$a_1$	0	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

$$A_1^0(\vartheta_1) = A_2^1(\vartheta_2) = A_3^2(\vartheta_3) = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore sferico

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\vartheta_2$
3	0	0	$d_3$	0



$$A_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

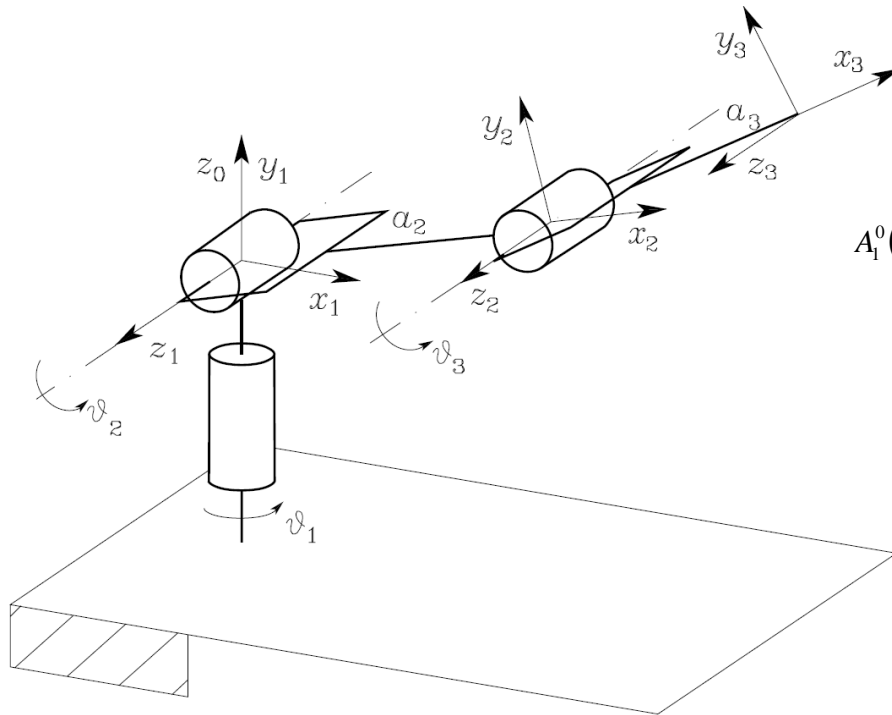
$$A_2^1(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 - c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore antropomorfo

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$



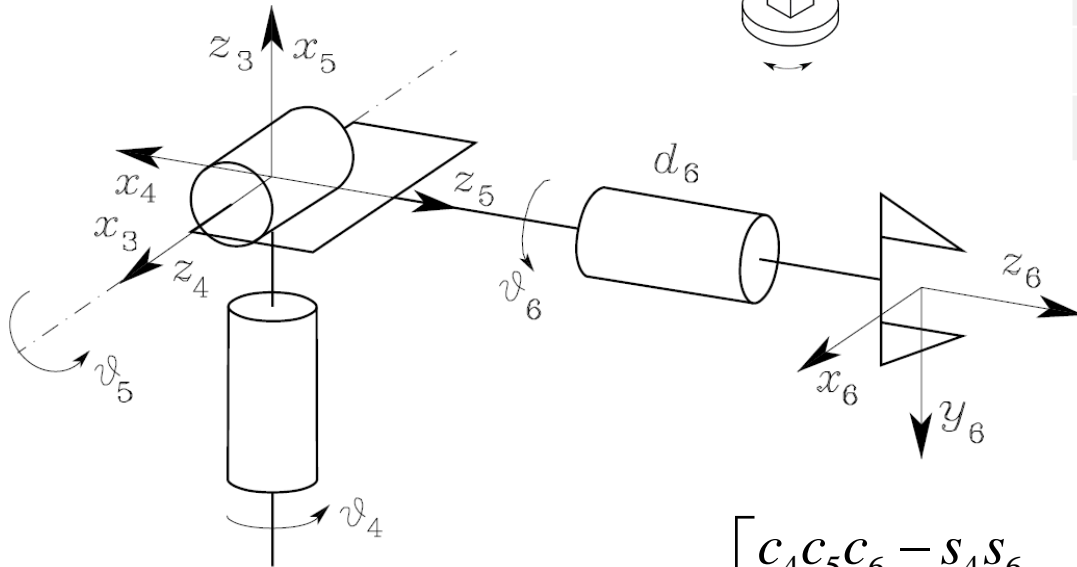
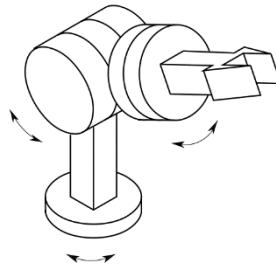
$$A_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(\vartheta_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0(q) = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Polso sferico

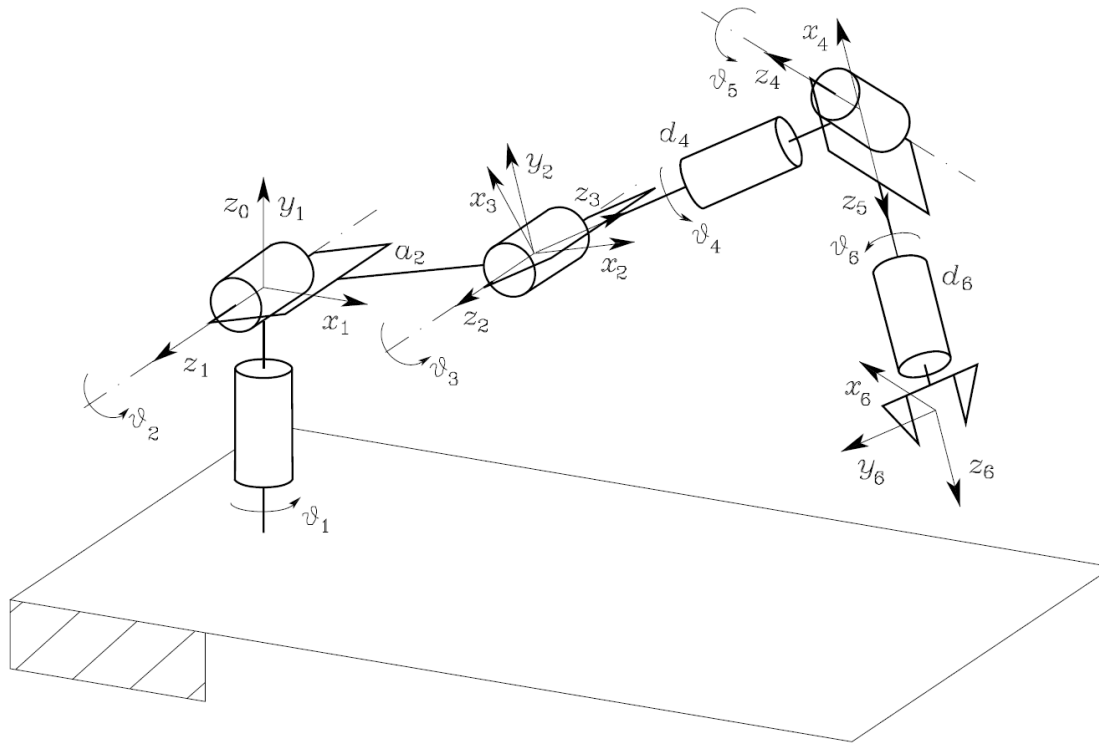


Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
4	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

$$T_6^3(q) = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_3$
4	0	$-\pi/2$	$d_4$	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

## Spazio dei giunti e spazio operativo

Se si fa riferimento ad una rappresentazione minima dell'orientamento è possibile descrivere il posizionamento del manipolatore mediante un vettore,  $m \times 1$ , con  $m = 6$ .

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix}$$

dove  $p$  caratterizza la posizione dell'organo terminale (tre componenti) e  $\phi$  il suo orientamento (altre tre componenti).

Lo spazio in cui è definito il vettore  $x$  è quello rispetto al quale viene tipicamente specificata l'operazione richiesta al manipolatore.

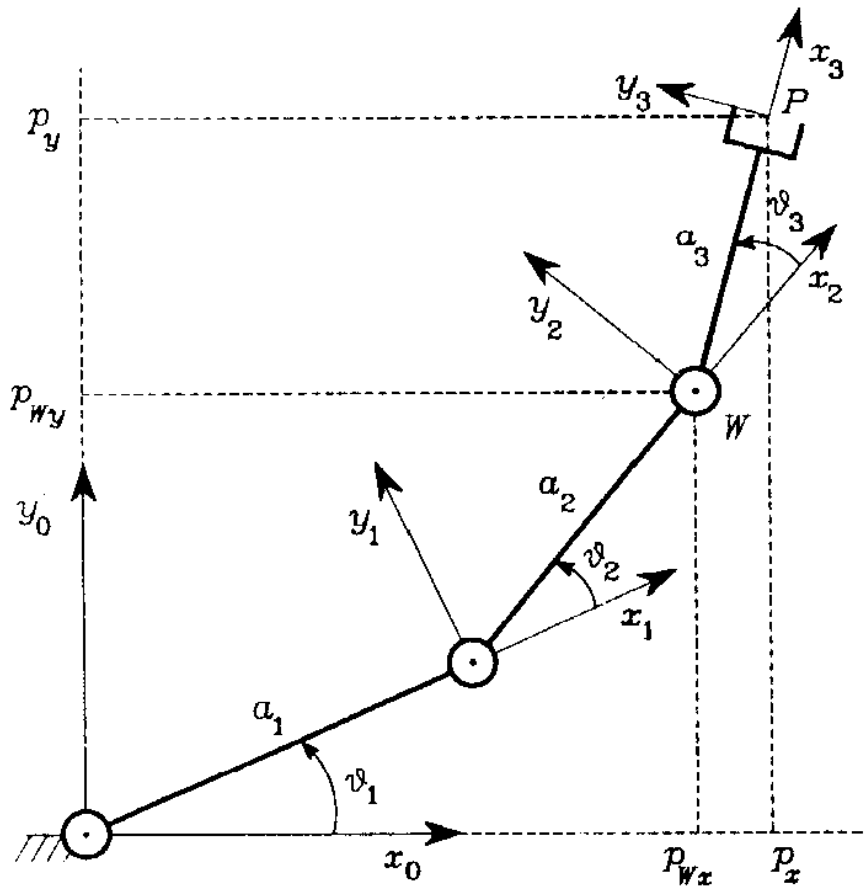
Pertanto esso è denominato *spazio operativo*. Il vettore  $x$ , come sappiamo, è funzione delle variabili di giunto.

Lo spazio in cui è definito il vettore  $n \times 1$  delle variabili di giunto è definito *spazio dei giunti* o delle configurazioni.  $q_i = \vartheta_i$  per giunti rotoidali e  $q_i = d_i$  per giunti prismatici.

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$x = k(q) \text{ Equazione della CINEMATICA DIRETTA}$$

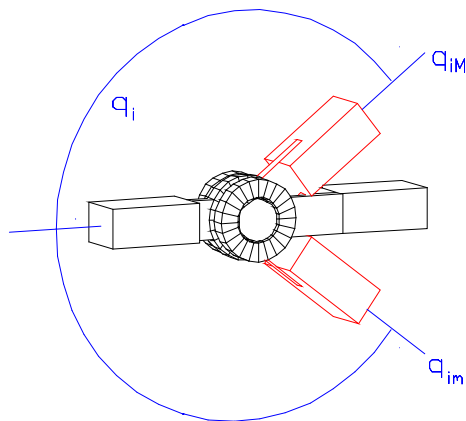
# Spazio dei giunti e spazio operativo



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = k(q) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

# Spazio di lavoro

- Con riferimento allo spazio operativo, si definisce *spazio di lavoro* di un manipolatore la regione descritta dall'origine della terna utensile quando ai giunti del manipolatore si fanno eseguire tutti i moti possibili.
  - *spazio di lavoro raggiungibile* è lo spazio di lavoro che la terna utensile può descrivere con almeno un orientamento
  - *spazio di lavoro destro* (o di destrezza) è la regione che l'origine della terna utensile può descrivere assumendo tutti gli orientamenti possibili.
- Ovviamente lo spazio di lavoro destro è un sottoinsieme dello spazio di lavoro raggiungibile.



$$p = p(q)$$

$$q_{im} \leq q_i \leq q_{iM} \quad i = 1, \dots, n$$

# Problema cinematico inverso

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

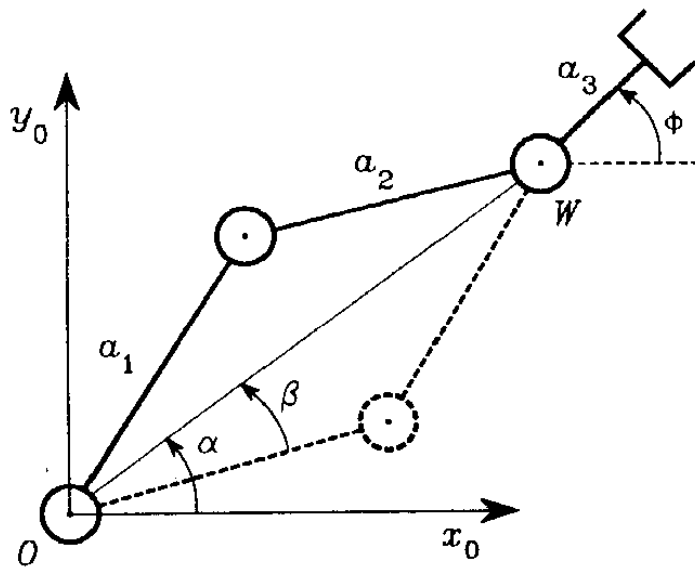
- Le equazioni da risolvere sono, in genere, non lineari delle quali non sempre è possibile trovare una *soluzione analitica* (in forma chiusa);
- Si possono avere *soluzioni multiple*
- Si possono avere *infinite soluzioni*, come nel caso di un manipolatore ridondante;
- Possono non esistere *soluzioni ammissibili*, data la struttura cinematica del manipolatore.

# Problema cinematico inverso

- Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni, questa è garantita se posizione ed orientamento assegnati appartengono allo spazio di lavoro destro del manipolatore.
- La determinazione di soluzioni in forma chiusa richiede:
  - *Intuizione algebrica*
  - *Intuizione geometrica*
  - *Tecniche numeriche di soluzione*

# Soluzione del manipolatore planare a tre bracci

$$T_3^0(q) = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_\phi \\ s_\phi & c_\phi & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$



$$= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & W_x + a_3c_\phi \\ s_\phi & c_\phi & 0 & W_y + a_3s_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Soluzione del manipolatore planare a tre bracci

$$\begin{cases} W_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ W_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ \phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_x^2 + W_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{W_x^2 + W_y^2 - a_1^2 + a_2^2}{2a_1 a_2} \\ s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

Osserviamo che per esistere la soluzione deve essere  $-1 \leq c_2 \leq 1$ , altrimenti il punto assegnato sta al di fuori dello spazio di lavoro. Inoltre il segno positivo indica la configurazione a gomito basso, mentre il segno negativo quella a gomito alto.

Ricavato  $\vartheta_2$  si sostituisce nel sistema trovato precedentemente, il quale diventa un sistema nelle due incognite  $s_1$  e  $c_1$ . Ricavate queste ultime, si ottiene  $\vartheta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$ .

Infine si ricava  $\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$ .



# Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_z = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_{23} \\ s_3^2 + c_3^2 = 1 \end{array} \right. \quad -1 \leq c_3 \leq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} c_3 = \frac{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \\ s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vartheta_3 = \text{atan2}(s_3, c_3)$$

Due soluzioni, in relazione al segno di  $s_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{3,I} \in [-\pi, \pi] \\ \vartheta_{3,II} = -\vartheta_{3,I} \end{array} \right.$$

Determinato  $\vartheta_3$  si può ricavare  $\vartheta_2$

# Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_z = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_x^2 + W_y^2 = (a_2c_2 + a_3c_{23})^2 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2c_2 + a_3c_{23} = \pm \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \end{array} \right.$$

$$c_2 = \frac{\pm \sqrt{W_x^2 + W_y^2}(a_2 + a_3c_3) + W_z a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3}$$

$$s_2 = \frac{W_z(a_2 + a_3c_3) \mp \sqrt{W_x^2 + W_y^2} a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3}$$

$$\Rightarrow \vartheta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

4 soluzioni, in relazione al segno di  $s_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{2,I}, \vartheta_{2,II} \quad s_3^+ \\ \vartheta_{2,III}, \vartheta_{2,IV} \quad s_3^- \end{array} \right.$$

Determinati  $\vartheta_3$  e  $\vartheta_2$  si può ricavare  $\vartheta_1$

# Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_z = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

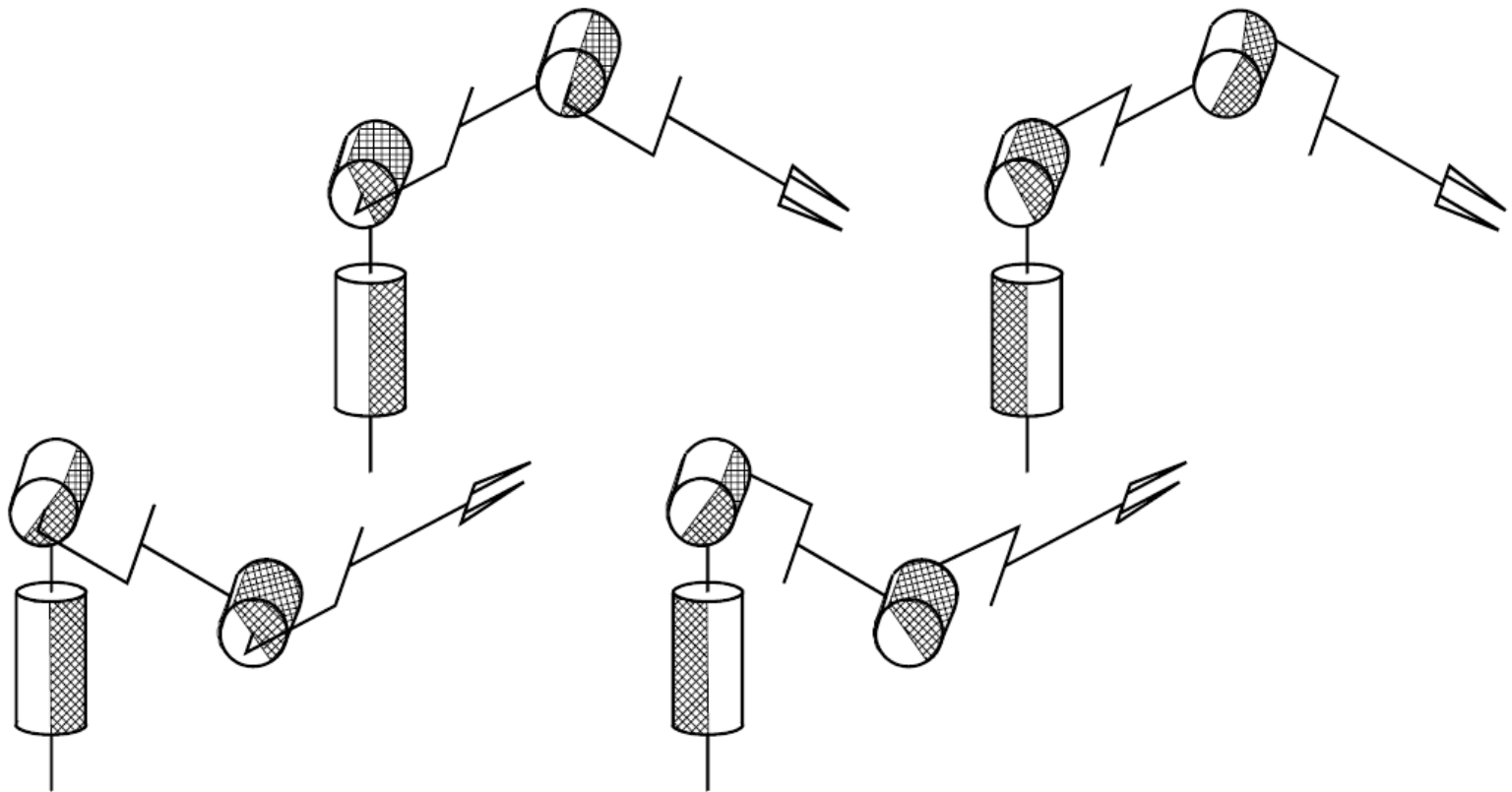
$$W_x^2 + W_y^2 = (a_2c_2 + a_3c_{23})^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} W_x = \pm c_1 \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ W_y = \pm s_1 \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \end{array} \right.$$



Due soluzioni

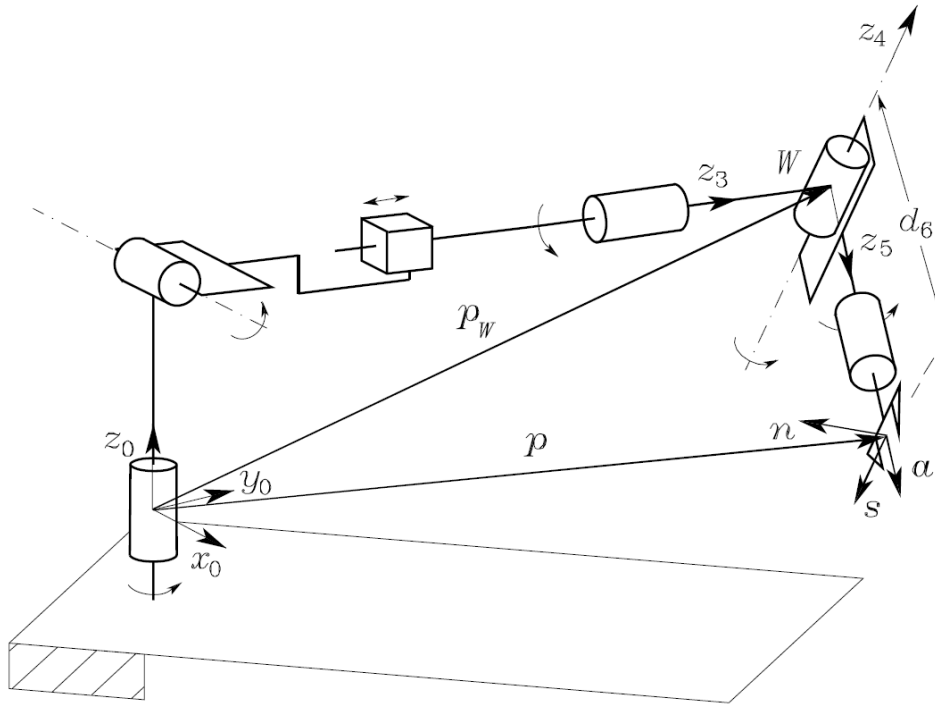
$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{1,I} = \text{atan2}(W_y, W_x) \\ \vartheta_{1,II} = \text{atan2}(-W_y, -W_x) \end{array} \right.$$

# Soluzione del manipolatore antropomorfo



4 configurazioni ammissibili

# Soluzione di manipolatori con polso sferico



Una struttura cinematica a 6 gradi di mobilità ha soluzione analitica alla cinematica inversa se:

- Tre assi di giunti rotoidali adiacenti s'incontrano in un punto, come avviene appunto nel caso di polso sferico;
- Tre assi di giunti rotoidali adiacenti sono paralleli.

- Si può individuare un punto  $W$  opportuno lungo la struttura, la cui posizione sia esprimibile in funzione della posa assegnata e in funzione di un insieme ridotto di variabili di giunto
- Si articola il problema cinematico inverso in due sotto-problemi, disaccoppiando la soluzione per la posizione da quella per l'orientamento

Per un manipolatore con polso sferico la scelta naturale del punto  $W$  è in coincidenza con il punto d'intersezione dei tre assi di giunto.

Infatti, una volta assegnati posizione ed orientamento della terna utensile in termini di  $\mathbf{p}$  e di  $\mathbf{R} = [\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$ , la posizione del centro del polso è individuata dalla relazione

$$\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$$

- Nel caso di strutture portanti a tre gradi di mobilità (non ridondante), la cinematica inversa può essere risolta secondo i seguenti passi:
  - Calcolare la posizione del polso  $\mathbf{p}_W(q_1, q_2, q_3)$  secondo la relazione  $\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$ .
  - Risolvere la cinematica inversa per  $(q_1, q_2, q_3)$ .
  - Calcolare  $R_3^0(q_1, q_2, q_3)$
  - Calcolare  $R_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = R_3^{0T} R$ , essendo il polso sferico.
  - Risolvere la cinematica inversa per l'orientamento  $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$ .