Controllo dei Robot

Cinematica – Parte 1

Paolo Lino

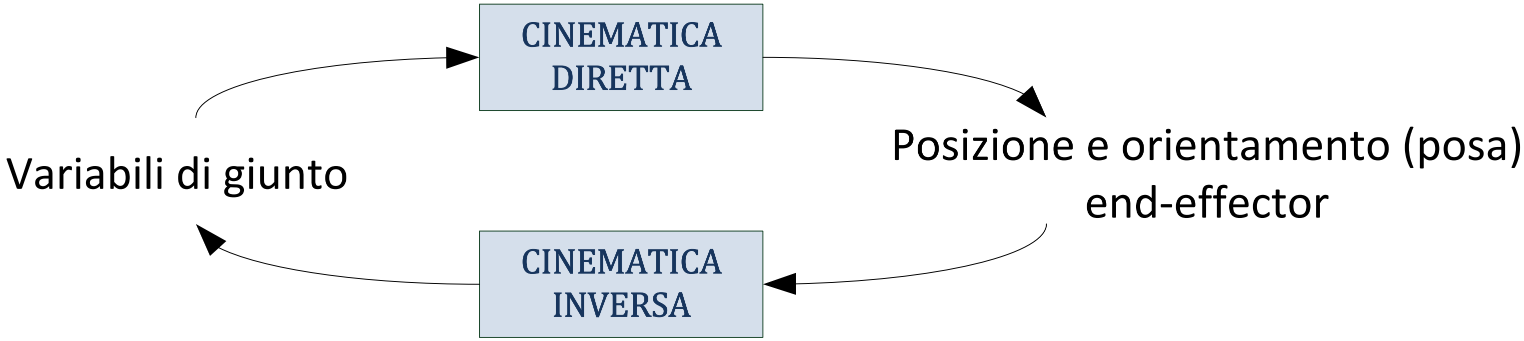
Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Politecnico di Bari

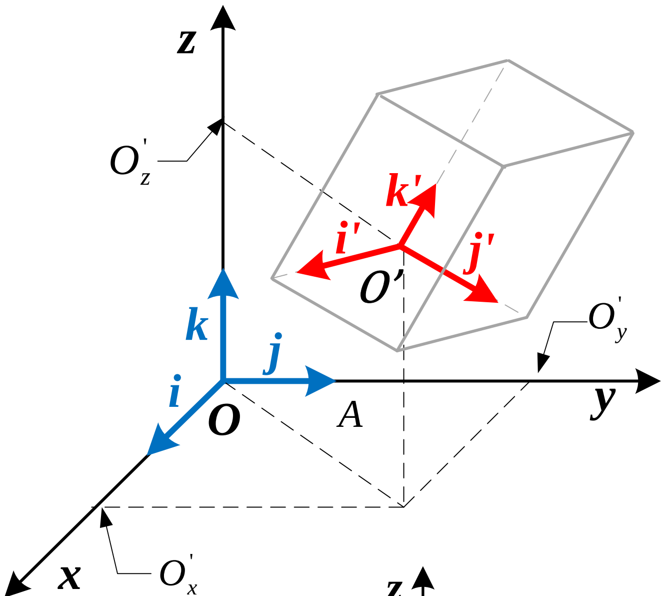
e-mail: paolo.lino [at] poliba.it

Cinematica del braccio di un robot

La cinematica si occupa dello studio analitico della geometria del movimento del braccio rispetto ad un sistema di riferimento in funzione del tempo, prescindendo dalle forze e dai momenti che provocano il moto

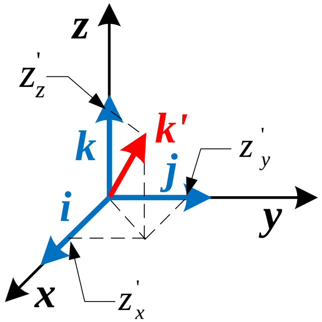


Posizione ed orientamento di un corpo rigido



$$O' = O'_x \boldsymbol{i} + O'_y \boldsymbol{j} + O'_z \boldsymbol{k} \qquad O' = \begin{bmatrix} O'_x \\ O'_y \\ O'_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = x'_x \boldsymbol{i} + x'_y \boldsymbol{j} + x'_z \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}' = y'_x \boldsymbol{i} + y'_y \boldsymbol{j} + y'_z \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}' = z'_x \boldsymbol{i} + z'_y \boldsymbol{j} + z'_z \boldsymbol{k} \end{cases}$$



$$\boldsymbol{i}' = \begin{bmatrix} x'_x \\ x'_y \\ x'_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{j}' = \begin{bmatrix} y'_x \\ y'_y \\ y'_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{k}' = \begin{bmatrix} z'_x \\ z'_y \\ z'_z \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

$$R = [\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'^T\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}'^T\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}'^T\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i}'^T\boldsymbol{j} & \boldsymbol{j}'^T\boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}'^T\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}'^T\boldsymbol{k} & \boldsymbol{j}'^T\boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}'^T\boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

ORTOGONALE

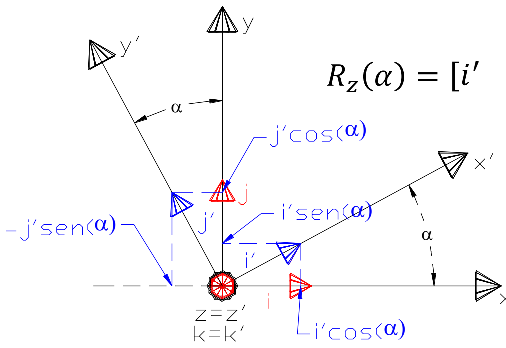
$$R^T R = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'^T \\ \boldsymbol{j}'^T \\ \boldsymbol{k}'^T \end{bmatrix} [\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}'] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'^T\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{i}'^T\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{i}'^T\boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{j}'^T\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}'^T\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{j}'^T\boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{k}'^T\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{k}'^T\boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'^T\boldsymbol{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = \boldsymbol{k}'^T(\boldsymbol{i}' \wedge \boldsymbol{j}') = \boldsymbol{i}'^T(\boldsymbol{j}' \wedge \boldsymbol{k}') = \boldsymbol{j}'^T(\boldsymbol{k}' \wedge \boldsymbol{i}')$$

$\det(R) = 1$ se la terna è levogira

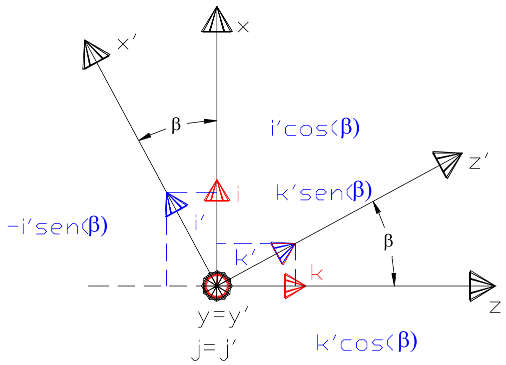
$\det(R) = -1$ se la terna è destrogira.

Rotazioni elementari



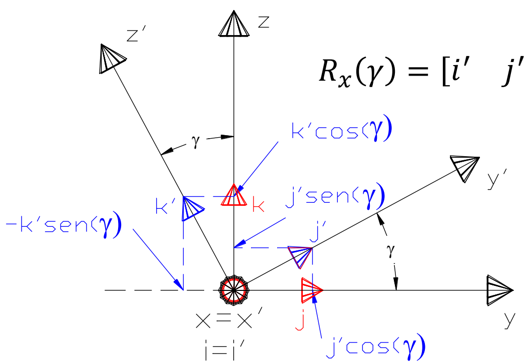
Rotazione attorno l'asse z

$$R_z(\alpha) = [i' \quad j' \quad k'] = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotazione attorno l'asse y

$$R_y(\beta) = [i' \quad j' \quad k'] = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sen(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix}$$

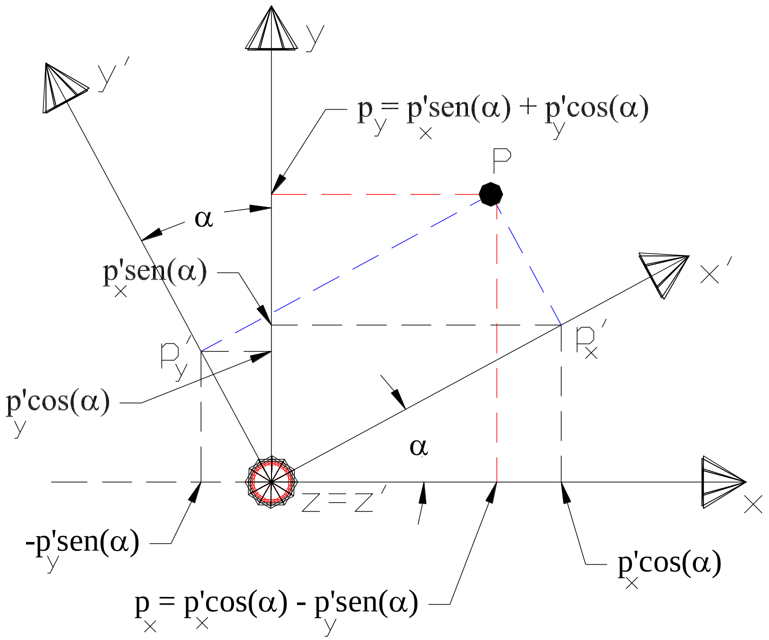


Rotazione attorno l'asse x

$$R_x(\gamma) = [i' \quad j' \quad k'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sen(\gamma) \\ 0 & sen(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$R_k(-\vartheta) = R_k^T(\vartheta) \text{ con } k = x, y, z$$

Esempio 1



Si considerino due terne con origine comune ruotate tra loro di un angolo α attorno all'asse z. Sia, poi, P un punto del piano $x - y$.

Il punto P nel sistema ruotato avrà coordinate $\boldsymbol{p}' \equiv (p'_x, p'_y, p'_z)$.

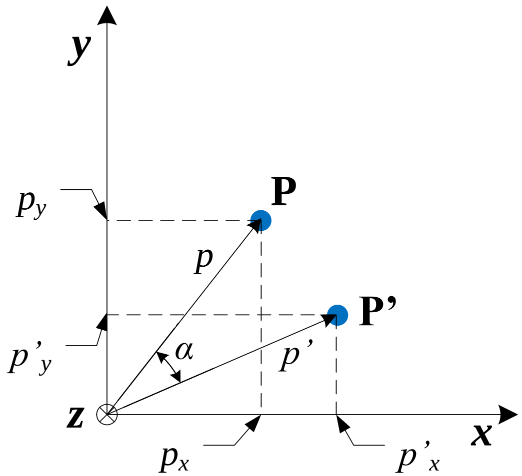
La rappresentazione dello stesso punto P nel sistema di riferimento sarà:

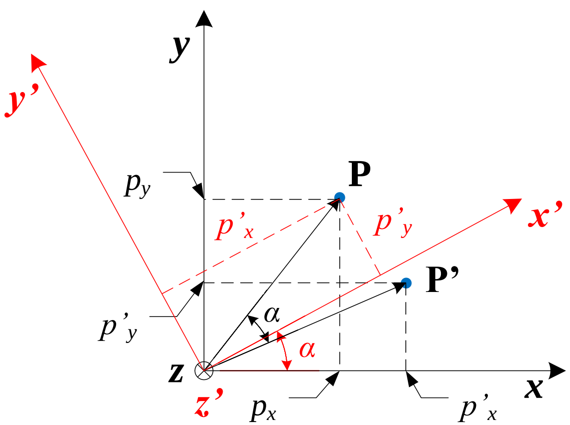
$$\begin{cases} p_x = p'_x cos(\alpha) - p'_y sen(\alpha) \\ p_y = p'_x sen(\alpha) + p'_y cos(\alpha) \\ p_z = p'_z \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}'$ i vettori rappresentativi del punto P nei due sistemi.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p} = R_z(\alpha)\boldsymbol{p}'$$

Esempio 2





Si consideri un vettore $\boldsymbol{p}$, ottenuto ruotando un vettore $\boldsymbol{p}'$ nel piano $x-y$ di un angolo α attorno all'asse z della terna di riferimento in cui esso è espresso.

Dette (p'_x, p'_y, p'_z) le coordinate del vettore $\boldsymbol{p}'$, il vettore $\boldsymbol{p}$ risultante dalla rotazione ha componenti:

$$\begin{cases} p_x = p'_x cos(\alpha) - p'_y sen(\alpha) \\ p_y = p'_x sen(\alpha) + p'_y cos(\alpha) \\ p_z = p'_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p} = R_z(\alpha)\boldsymbol{p}'$$

Significato geometrico della matrice di rotazione

- Fornisce l'orientamento di una terna di coordinate rispetto ad un'altra. I vettori colonna sono i coseni direttori degli assi della terna ruotata rispetto alla terna di riferimento.

- Rappresenta una trasformazione di coordinate che mette in relazione le coordinate di un punto in due terne differenti con origine comune $\boldsymbol{p} = R\boldsymbol{p}'$. Inoltre in virtù della proprietà di ortogonalità della matrice R, la trasformazione inversa si scrive $\boldsymbol{p}' = R^T\boldsymbol{p}$

- La matrice di rotazione R rappresenta l'operatore che permette di ruotare un vettore (nella stessa terna), di un angolo prefissato, attorno ad un generico asse di rotazione nello spazio.

Composizione di matrici di rotazione

Siano assegnate tre terne di coordinate $O - x_0y_0z_0$, $O - x_1y_1z_1$ e $O - x_2y_2z_2$ aventi origini comuni O. Il vettore $\boldsymbol{p}$ rappresentativo di un generico punto nello spazio può essere rappresentato in ciascuna delle tre terne.

Siano $\boldsymbol{p}^{\mathbf{0}}$, $\boldsymbol{p}^{\mathbf{1}}$, e $\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}$ i vettori rappresentativi di $\boldsymbol{p}$ nei tre sistemi.

Nel seguito, l'apice di un vettore o di una matrice indica la terna in cui sono espressi i suoi elementi

Indichiamo con R_i^j la matrice di rotazione della terna i rispetto alla terna j.

$$\begin{cases} p^0 = R_1^0 p^1 \\ p^0 = R_2^0 p^2 \\ p^1 = R_2^1 p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 \\ p^0 = R_2^0 p^2 \end{cases} \Rightarrow R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

La matrice di rotazione di un sistema rispetto ad un altro può essere espressa mediante la composizione di matrici di rotazione rappresentanti rotazioni successive dello stesso sistema

Rotazioni successive rispetto alla terna corrente

- Siano $O\text{–}xyz$, $O' - x'y'z'$ e $O'' - x''y''z''$ tre terne, che per il momento supponiamo coincidenti.
- Ruotiamo contemporaneamente attorno all'asse z due sistemi $O' - x'y'z'$ e $O'' - x''y''z''$ dell'angolo α'. La matrice di rotazione che esprime questa rotazione sarà:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} cos(\alpha') & -sen(\alpha') & 0 \\ sen(\alpha') & cos(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ruotiamo adesso attorno all'asse z il sistema $O'' - x''y''z''$ dell'angolo α'', rispetto alla terna corrente $O' - x'y'z'$. La rotazione del sistema $O'' - x''y''z''$ rispetto alla terna $O' - x'y'z'$ si esprime con la relazione:

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} cos(\alpha'') & -sen(\alpha'') & 0 \\ sen(\alpha'') & cos(\alpha'') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni successive rispetto alla terna corrente

La rotazione totale della terna $O-xyz$ di un angolo α attorno all'asse z, quindi, può essere espressa come composizione delle matrici di rotazione rappresentativa della prima rotazione con la matrice di rotazione rappresentativa della seconda rotazione rispetto alla terna già ruotata , infatti:

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha' + \alpha'') & -sen(\alpha' + \alpha'') & 0 \\ sen(\alpha' + \alpha'') & cos(\alpha' + \alpha'') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 R_2^1 = \begin{bmatrix} cos(\alpha') & -sen(\alpha') & 0 \\ sen(\alpha') & cos(\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\alpha'') & -sen(\alpha'') & 0 \\ sen(\alpha'') & cos(\alpha'') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

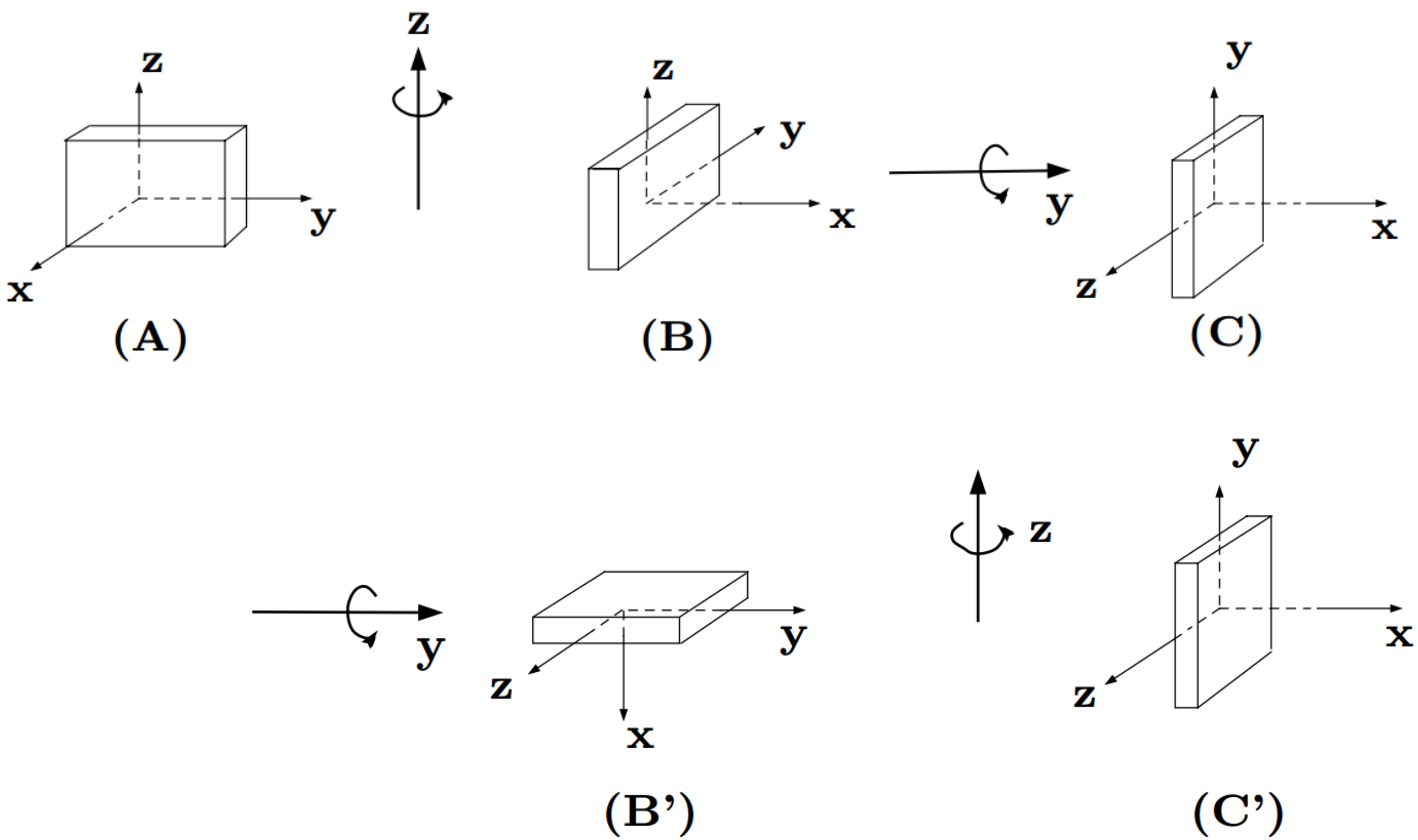
$$R_1^0 R_2^1 = \begin{bmatrix} cos(\alpha')cos(\alpha'') - sen(\alpha')sen(\alpha'') & -cos(\alpha')sen(\alpha'') - sen(\alpha')cos(\alpha'') & 0 \\ sen(\alpha')cos(\alpha'') + cos(\alpha')sen(\alpha'') & -sen(\alpha')sen(\alpha'') + cos(\alpha')cos(\alpha'') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1^0 R_2^1 = \begin{bmatrix} cos(\alpha' + \alpha'') & -sen(\alpha' + \alpha'') & 0 \\ sen(\alpha' + \alpha'') & cos(\alpha' + \alpha'') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni successive rispetto alla terna corrente

- Si noti che la rotazione complessiva è espressa come successione di rotazioni parziali, ciascuna delle quali è definita rispetto alla rotazione precedente. La terna rispetto alla quale avviene la rotazione in atto è definita *terna corrente*.
- In conclusione, la composizione di rotazioni successive rispetto alla terna corrente si ottiene per moltiplicazione da sinistra verso destra le matrici delle singole rotazioni, nell'ordine della rotazione.

Rotazioni successive rispetto alla terna corrente



Rotazioni successive rispetto alla terna corrente

$\bar{R}_2^0$ Matrice che caratterizza la terna $O'' - x''y''z''$ rispetto alla terna $O - xyz$, ottenuta da rotazioni successive riferite alla terna fissa

Poiché dobbiamo fare riferimento alla terna base, supponiamo che i due sistemi $O' - x'y'z'$ e $O'' - x''y''z''$ abbiano subito le loro rotazioni. Seguiamo allora i seguenti passi:

- Esprimiamo la rotazione della terna $O' - x'y'z'$ rispetto alla terna di riferimento, mediante la rotazione R_1^0.
- Riallineiamo la terna $O' - x'y'z'$ con la terna $O - xyz$ mediante la rotazione R_0^1
- Essendo, adesso, le due terne allineate, si esprime la rotazione della terna $O' - x'y'z'$ per sovrapporla alla terna $O'' - x''y''z''$ mediante la matrice $\bar{R}_2^1$
- Infine si compensa la rotazione effettuata per il riallineamento con la rotazione inversa R_1^0

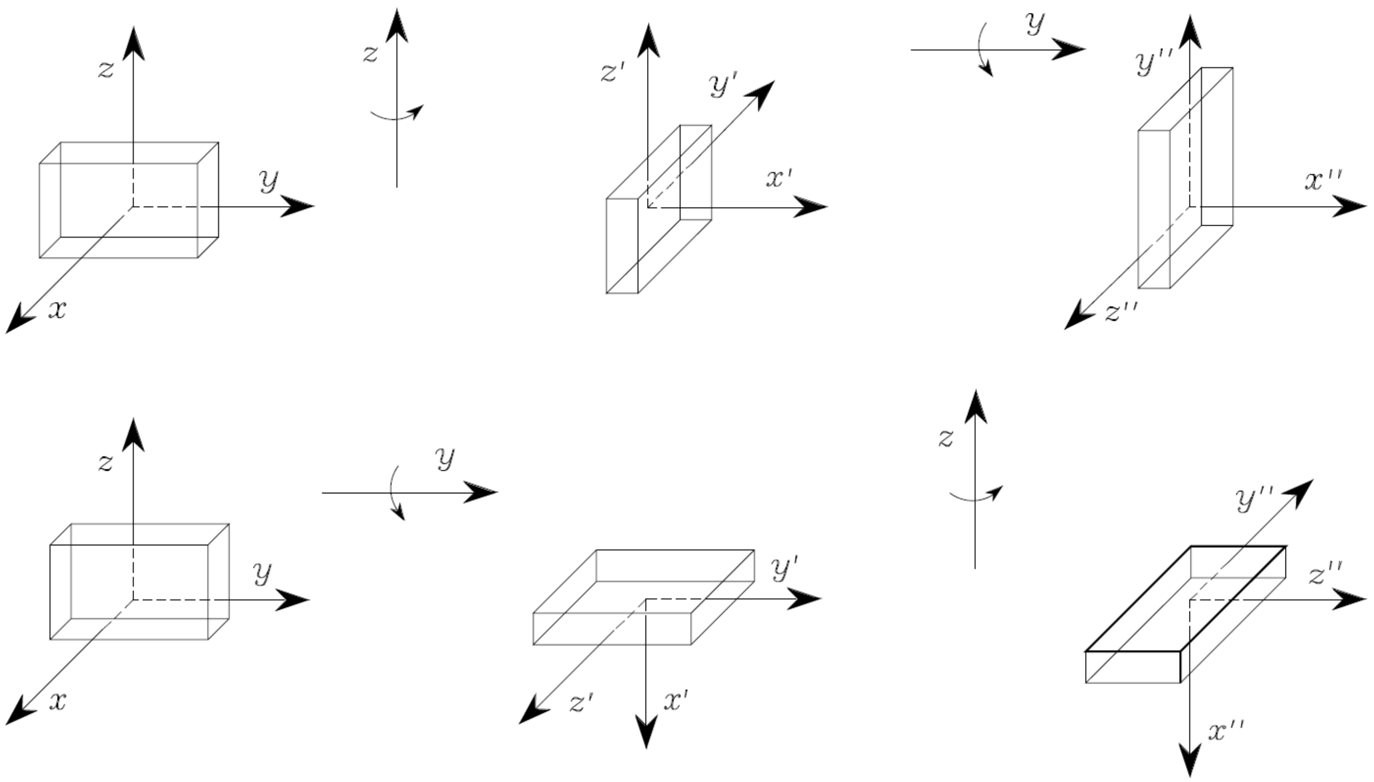
Rotazioni successive rispetto alla terna corrente

In conclusione, la composizione di rotazioni successive rispetto ad una terna fissa si ottiene moltiplicando da destra verso sinistra le singole matrici di rotazione nell'ordine delle rotazioni.

$$\bar{R}_2^0 = R_1^0 R_0^1 \bar{R}_2^1 R_1^0 = I \bar{R}_2^1 R_1^0 = \bar{R}_2^1 R_1^0$$

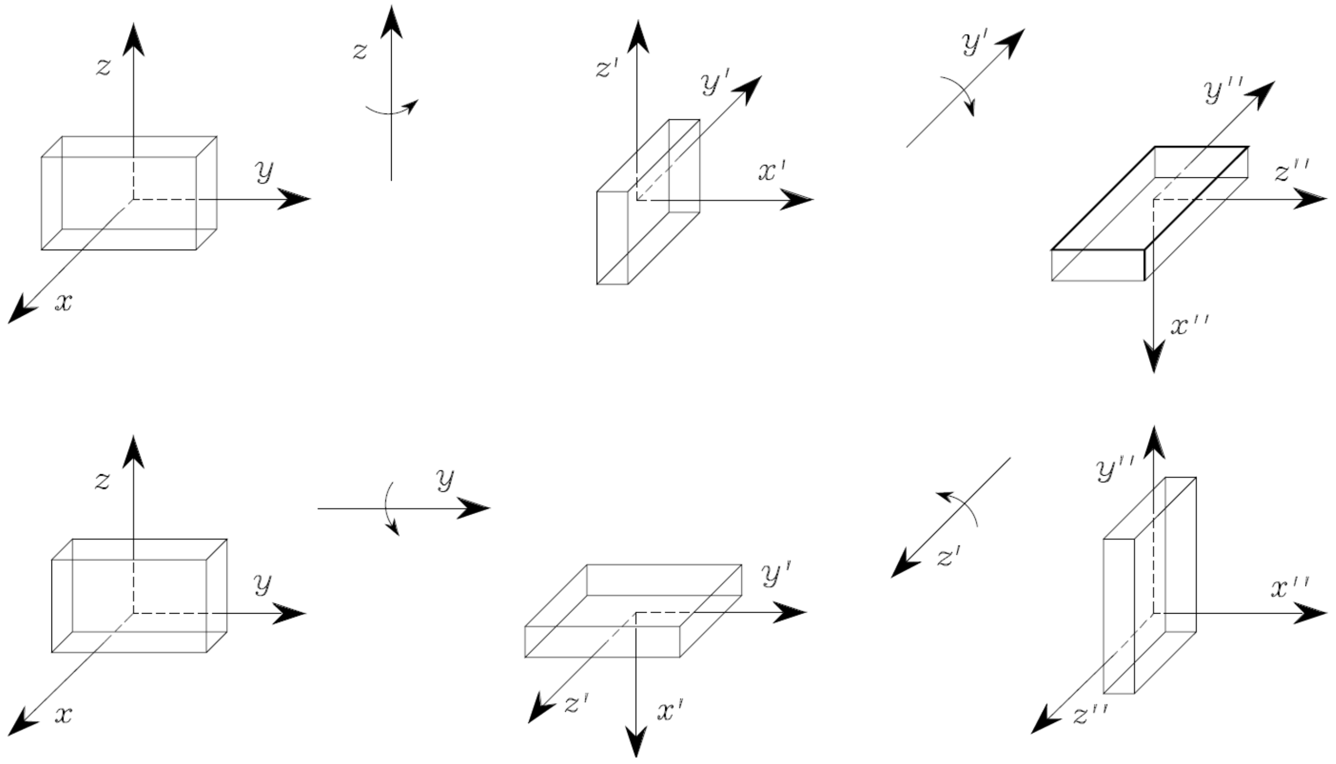
Importanza dell'ordine delle rotazioni

Rotazioni rispetto ad una terna fissa

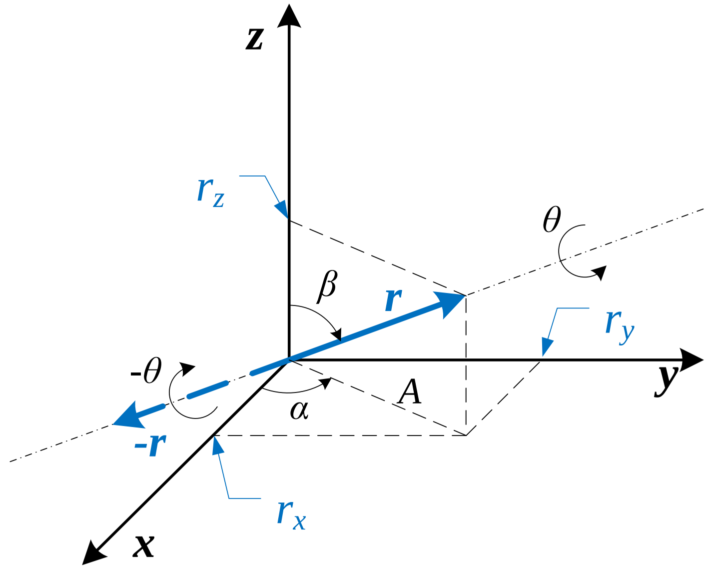


Importanza dell'ordine delle rotazioni

Rotazioni rispetto alla terna corrente



Rotazione intorno ad un asse arbitrario

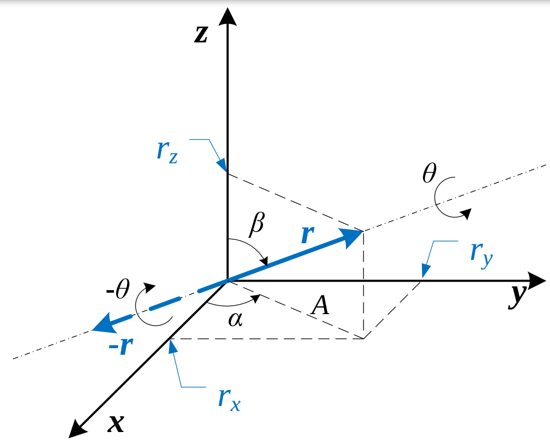


- Sovrapposizione di $\boldsymbol{r}$ su z, che si ottiene come successione di rotazioni di $-\alpha$ intorno a z e di una rotazione di $-\beta$ intorno a y
- Rotazione di θ intorno a z
- Ripristino dell'orientamento iniziale di $\boldsymbol{r}$, che si ottiene come successione di una rotazione di β attorno all'asse y e di una rotazione α attorno all'asse z.

$$R_r(\theta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\theta)R_y(-\beta)R_z(-\alpha)$$

Rotazione intorno ad un asse arbitrario

$$\left\|\begin{array}{l} \mathrm{sen}(\beta)=A \\ \cos(\beta)=r_z \\ r_y = A\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ r_x = A\cos(\alpha) \\ A=\sqrt{r_x^2+r_y^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\|\begin{array}{l} \mathrm{sen}(\beta)=\sqrt{r_x^2+r_y^2} \\ \cos(\beta)=r_z \\ \mathrm{sen}(\alpha)=\dfrac{r_y}{\sqrt{r_x^2+r_y^2}} \\ \cos(\alpha)=\dfrac{r_x}{\sqrt{r_x^2+r_y^2}} \end{array}\right.$$



$$R_r(\theta)=\begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\theta)+c_\theta & r_x r_y(1-c_\theta)-r_z s_\theta & r_x r_z(1-c_\theta)+r_y s_\theta \\ r_x r_y(1-c_\theta)+r_z s_\theta & r_y^2(1-c_\theta)+c_\theta & r_y r_z(1-c_\theta)-r_x s_\theta \\ r_x r_z(1-c_\theta)-r_y s_\theta & r_y r_z(1-c_\theta)+r_x s_\theta & r_z^2(1-c_\theta)+c_\theta \end{bmatrix}$$

Osserviamo che vale la relazione: $R_{-r}(-\theta)=R_r(\theta)$

Questo dimostra che la rappresentazione non è univoca, poiché una rotazione di $-\theta$ intorno a $-\boldsymbol{r}$ provoca gli stessi effetti della rotazione di θ attorno ad $\boldsymbol{r}$.

Rotazione intorno ad un asse arbitrario: Problema inverso

Problema inverso

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta = cos^{-1}\left(\dfrac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right) \\ \boldsymbol{r} = \dfrac{1}{2sen(\theta)}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Per $sen(\theta) \neq 0$ le due espressioni caratterizzano la rotazione in termini di quattro parametri: l'angolo e le tre componenti del vettore $\boldsymbol{r}$. Tuttavia si può osservare che le tre componenti del vettore non sono linearmente indipendenti, poiché $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$.
- Se $sen(\theta) = 0$ le relazioni trovate perdono di significato. Per il problema inverso occorre fare riferimento alla particolare matrice di rotazione ed individuare le formule risolutive nei due casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Si noti che per $\theta = 0$ (rotazione nulla) il versore $\boldsymbol{r}$ è arbitrario.

Quaternione unitario

Gli inconvenienti della descrizione asse e angolo possono essere superati ricorrendo ad una rappresentazione a quattro parametri: il **quaternione unitario**

$$\boldsymbol{Q} = \{\eta, \boldsymbol{\epsilon}\}$$

$$\eta = cos\frac{\vartheta}{2}$$ *parte scalare*

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = sin\frac{\vartheta}{2}\boldsymbol{r}$$ *parte vettoriale*

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1$$ *vincolo*

$$R(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2\left(\epsilon_x\epsilon_y - \eta\epsilon_z\right) & 2\left(\epsilon_x\epsilon_z + \eta\epsilon_y\right) \\ 2\left(\epsilon_x\epsilon_y + \eta\epsilon_z\right) & 2\left(\eta^2 + \epsilon_y^2\right) - 1 & 2\left(\epsilon_y\epsilon_z - \eta\epsilon_z\right) \\ 2\left(\epsilon_x\epsilon_z - \eta\epsilon_y\right) & 2\left(\epsilon_y\epsilon_z + \eta\epsilon_z\right) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

Quaternione unitario: Problema inverso

Problema inverso

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \eta = \dfrac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} sgn(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ sgn(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ sgn(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Si è implicitamente assunto $\eta \geq 0$, ovvero $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, il che consente di descrivere qualsiasi rotazione
- A differenza della soluzione inversa del problema asse e angolo, le formule non presentano singolarità
- Il quaternione estratto da $R^{-1} = R^T$, indicato con $\boldsymbol{Q}^{-1}$, può essere calcolato come $\boldsymbol{Q}^{-1} = \{\eta, -\boldsymbol{\epsilon}\}$

Rappresentazioni minime dell'orientamento

- Le matrici di rotazione forniscono una descrizione ridondante dell'orientamento di una terna: 9 elementi legati tra loro da 6 vincoli di ortogonalità.

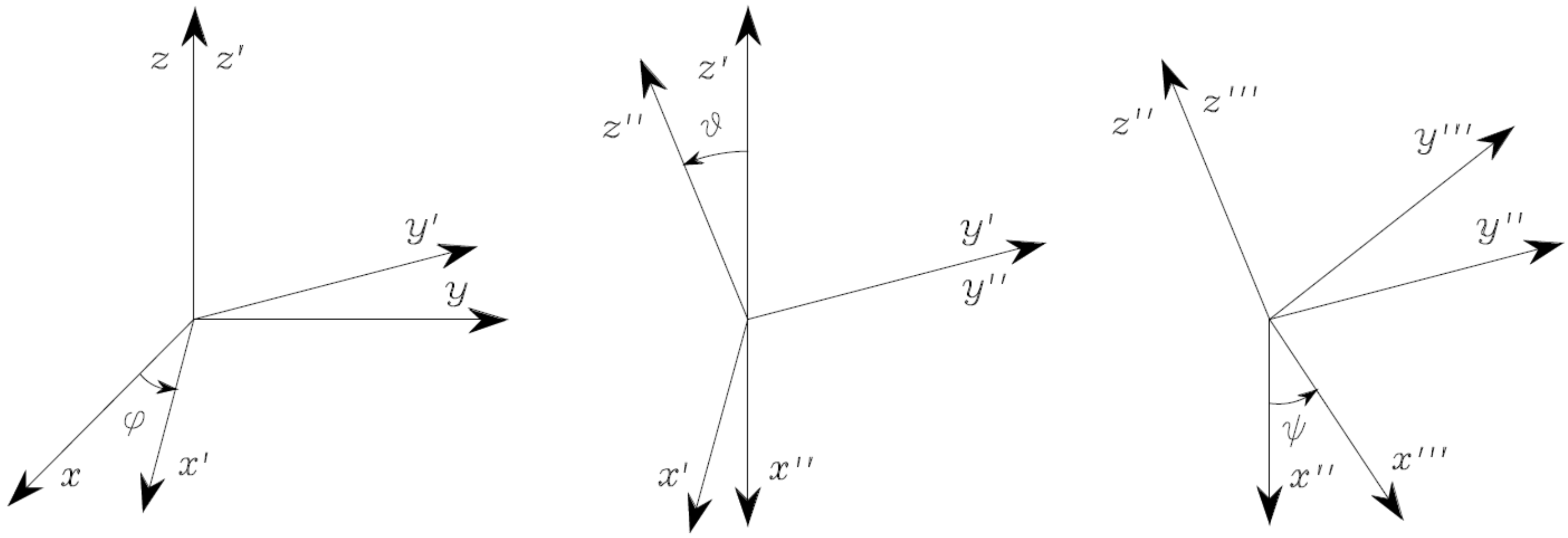
$$i'^T i' = 1 \quad j'^T j' = 1 \quad k'^T k' = 1$$
$$i'^T j' = 0 \quad j'^T k' = 0 \quad k'^T i' = 0$$

- I parametri effettivi per la descrizione di un orientamento sono 3. Una descrizione in termini di 3 parametri indipendenti costituisce una rappresentazione minima (e.g. 3 angoli).

- Una generica matrice di rotazione può essere ricavata per composizione di tre rotazioni elementari secondo opportune sequenze, in modo da garantire che due rotazioni successive non avvengano intorno ad assi paralleli (12 possibili combinazioni). **Ciascun insieme di tre angoli rappresenta una terna di angoli di Eulero**

Rappresentazioni minime dell'orientamento

Angoli di Eulero



Rappresentazione di angoli di Eulero ZYZ

Angoli di Eulero ZYZ

- Si ruota la terna originale dell'angolo φ attorno all'asse z

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & -sen(\varphi) & 0 \\ sen(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si ruota la terna, ruotata, dell'angolo ϑ attorno all'asse corrente y'

$$R_{y'}(\vartheta) = \begin{bmatrix} cos(\vartheta) & 0 & sen(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\vartheta) & 0 & cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

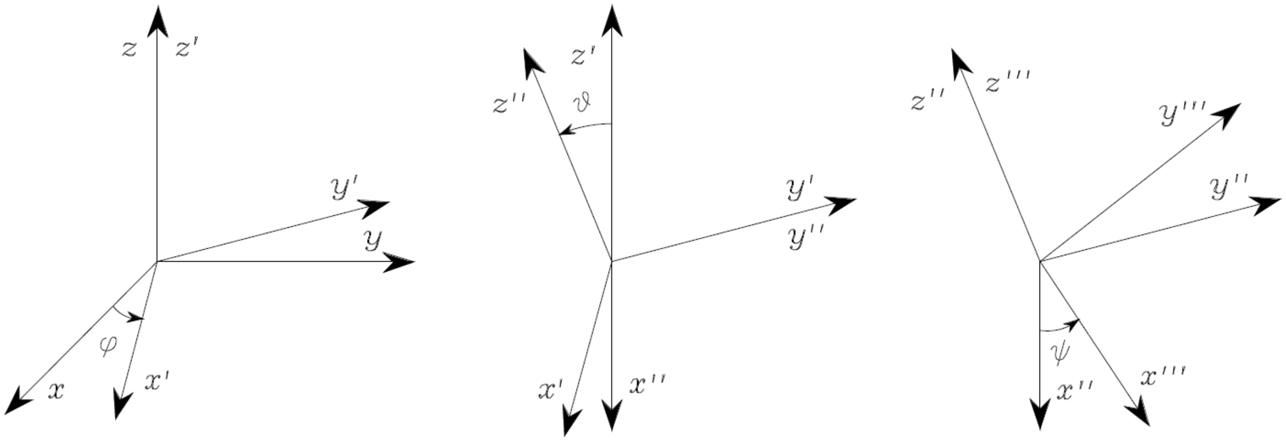
- Si ruota ancora la terna, ruotata, dell'angolo ψ attorno all'asse corrente z''

$$R_{z''}(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\psi) & -sen(\psi) & 0 \\ sen(\psi) & cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angoli di Eulero ZYZ

L'orientamento finale della terna, che si ottiene con la composizione di rotazioni definite rispetto alla terna corrente è:

$$R_{EUL} = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta c_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$



Angoli di Eulero ZYZ: Problema inverso

Problema inverso

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad R_{EUL} = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta c_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Si possono ricavare due soluzioni in funzione del valore di ϑ:
$\vartheta \in (0, \pi)$ $\qquad$ $\vartheta \in (-\pi, 0)$

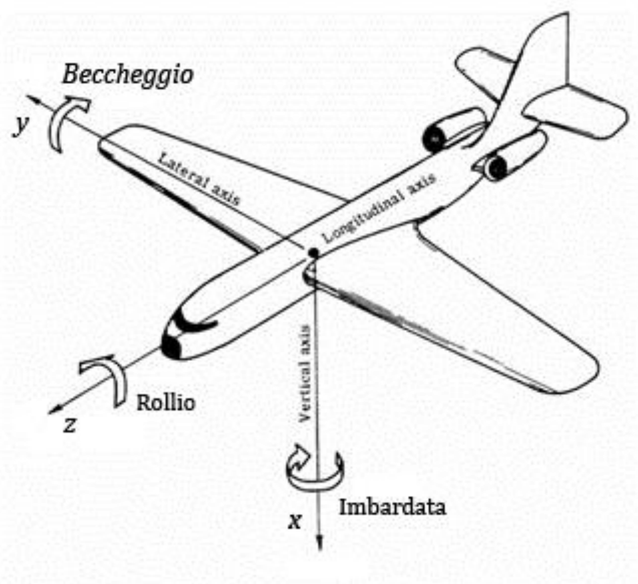
Le due soluzioni ricavate degenerano quando $sen(\vartheta) = 0$; in questo caso è possibile determinare soltanto la somma o la differenza di φ e ψ. Infatti, se $\vartheta = (0, \pi)$, le rotazioni successive di φ e ψ sono effettuate intorno ad assi di terna corrente paralleli fra di loro, fornendo così effetti di rotazione equivalenti.

$$\vartheta \in (0, \pi) \quad \begin{cases} \varphi = atan2(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta = atan2\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi = atan2(r_{32}, -r_{31}) \end{cases}$$

$$\vartheta \in (-\pi, 0) \quad \begin{cases} \varphi = atan2(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta = atan2\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi = atan2(-r_{32}, r_{31}) \end{cases}$$

Angoli RPY

- Tale rappresentazione trae origine da una descrizione delle rotazioni usate frequentemente in nautica ed aeronautica.
- L'acronimo **RPY** indica, rispettivamente, il rollio (**Roll**), il beccheggio (**Pitch**), e l'imbardata (**Yaw**).
- In questo caso, la terna di parametri rappresenta rotazioni definite rispetto ad una terna fissa solidale al baricentro.



Angoli RPY

- Si ruota la terna origine dell'angolo ψ intorno all'asse x (imbardata)

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\psi) & -sen(\psi) \\ 0 & sen(\psi) & cos(\psi) \end{bmatrix}$$

- Si ruota la terna originale dell'angolo ϑ intorno all'asse y (beccheggio)

$$R_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} cos(\vartheta) & 0 & sen(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\vartheta) & 0 & cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

- Si ruota la terna originale dell'angolo φ intorno all'asse z (rollio)

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & -sen(\varphi) & 0 \\ sen(\varphi) & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Angoli RPY

La rotazione globale della terna, essendo ottenuta per composizione rispetto ad una terna fissa, è:

$$R_{RPY} = R_z(\varphi)R_y(\vartheta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & -s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Angoli RPY: Problema inverso

Problema inverso

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad R_{RPY} = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & -s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Si possono ricavare due soluzioni in funzione del valore di ϑ:

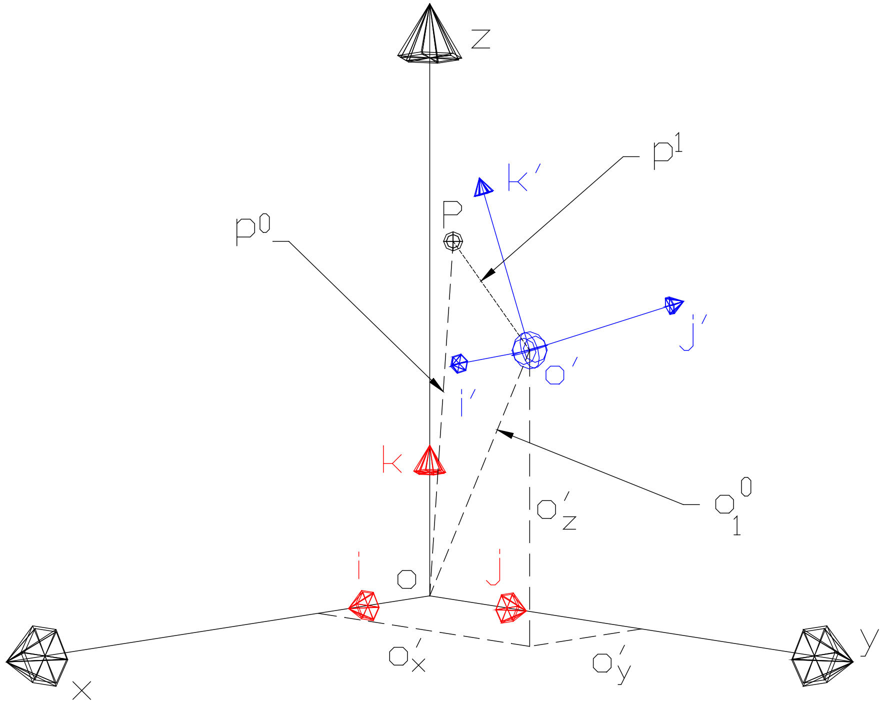
$\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

Le due soluzioni ricavate degenerano quando $cos(\vartheta) = 0$; in questo caso è possibile determinare soltanto la somma o la differenza di φ e ψ.

$$\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \begin{cases} \varphi = atan2(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta = atan2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi = atan2(r_{32}, r_{33}) \end{cases}$$

$$\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \begin{cases} \varphi = atan2(-r_{21}, -r_{11}) \\ \vartheta = atan2\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi = atan2(-r_{32}, -r_{33}) \end{cases}$$

Trasformazioni omogenee



Trasformazione di coordinate

$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1$$

Trasformazione inversa

$$p^1 = -[R_1^0]^T o_1^0 + [R_1^0]^T p^0$$

$$p^1 = -R_0^1 o_1^0 + R_0^1 p^0$$

Coordinate omogenee

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{p}^0 = A_1^0 \tilde{p}^1$$

matrice di trasformazione omogenea

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

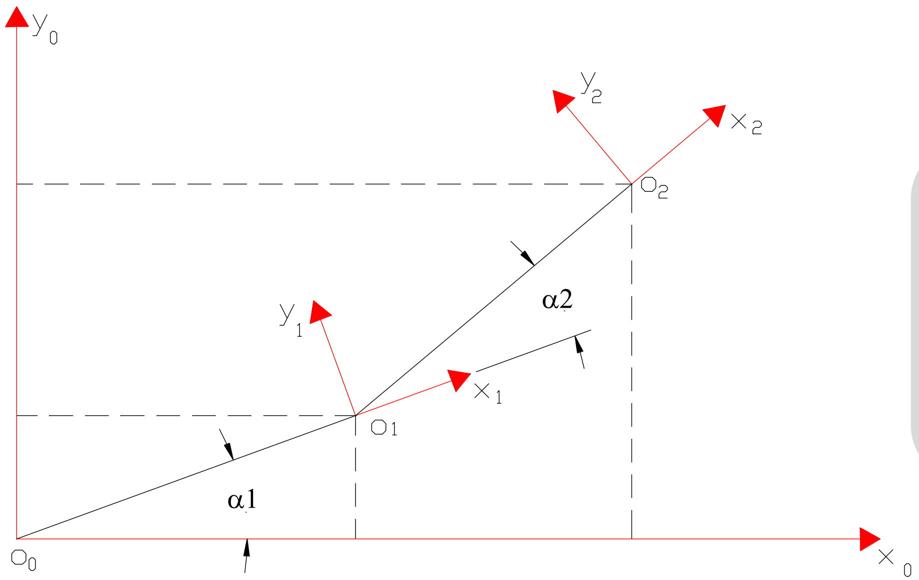
trasformazione inversa $$A_0^1 = \begin{bmatrix} \left[R_1^0\right]^T & -\left[R_1^0\right]^T o_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & -R_0^1 o_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva che in generale è $A^{-1} \neq A^T$. Inoltre, se le terne hanno la stessa origine, essendo $o_1^0 = [0\ 0\ 0]^T$, essa si riduce alla semplice matrice di rotazione.

Successione di trasformazioni consecutive di coordinate

$$\tilde{p}^0 = A_1^0 A_2^1 \cdots A_n^{n-1} \tilde{p}^n$$

Esempio



$$A_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & \left(\overline{o_0 o_1}\right)c_1 + \left(\overline{o_1 o_2}\right)c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & \left(\overline{o_0 o_1}\right)s_1 + \left(\overline{o_1 o_2}\right)s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & (\overline{o_0 o_1})c_1 + (\overline{o_1 o_2})c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & (\overline{o_0 o_1})s_1 + (\overline{o_1 o_2})s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & (\overline{o_1 o_2})c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & (\overline{o_1 o_2})s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & (\overline{o_0 o_1})c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & (\overline{o_0 o_1})s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & (\overline{o_0 o_1})c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & (\overline{o_0 o_1})s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & (\overline{o_1 o_2})c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & (\overline{o_1 o_2})s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 & 0 & (\overline{o_1 o_2})(c_1c_2 - s_1s_2) + (\overline{o_0 o_1})c_1 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & -s_1s_2 + c_1c_2 & 0 & (\overline{o_1 o_2})(s_1c_2 + c_1s_2) + (\overline{o_0 o_1})s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & (\overline{o_0 o_1})c_1 + (\overline{o_1 o_2})c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & (\overline{o_0 o_1})s_1 + (\overline{o_1 o_2})s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$