Esercizi per il corso di Fondamenti di Automatica (Mod. I)

Ingegneria Informatica e Dell'Automazione (A-L)

Ingegneria dei Sistemi Medicali

Docente: Dott. Ing. Luca De Cicco

22 novembre 2019

Esercizio 1. (Trasformata di Laplace) ★

Determinare la trasformata di Laplace dei segnali:

$$x_1(t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

con $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Esercizio 2. (Trasformata di Laplace) ★★

Determinare la trasformata di Laplace del segnale causale:

$$x(t) = te^{-at} \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

con $a \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Esercizio 3. (Trasformata di Laplace) ★★

1. Considerato il segnale $x(t)$ in Figura 1 se ne determini la trasformata di Laplace $X(s)$.

2. Si consideri ora il segnale $x'(t)$ (derivata generalizzata) e se ne determini la trasformata di Laplace.

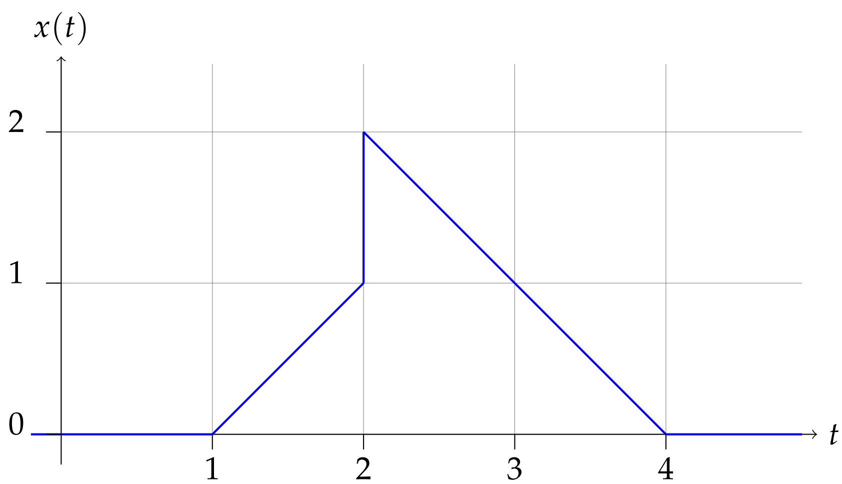


Figura 1: Segnale $x(t)$

Esercizio 4. (Antitrasformata di Laplace) ★★

Sia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

la funzione di trasferimento di un sistema LTI.

1. Si determini la risposta forzata del sistema all'ingresso:

$$u(t) = e^{-at} 1(t)$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ (con $a = 0$ incluso).

2. Si specifichi in particolare cosa accade per $a = 1$, $a = 0$ e $a = 2$.

Esercizio 5. (Antitrasformata di Laplace) ★★★

Considerata la seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+4)}$$

si determini:

1. La risposta forzata all'ingresso $u(t) = 1(t)$
2. La risposta all'impulso $u(t) = \delta(t)$
3. Il valor finale della risposta del sistema al segnale $1(t) + 1(t-1)$.

Esercizio 6. (Modellistica) ★★★★

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 2, dove R_{cd} rappresenta la resistenza termica della giunzione tra la CPU (colorata in bianco) e il dissipatore (colorato in grigio), R_{de} quella tra il dissipatore e l'ambiente esterno, C_c la capacità termica della CPU, C_d quella del dissipatore e si considera infinita la capacità termica dell'ambiente esterno.

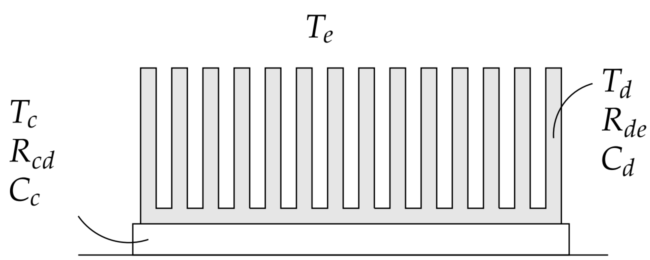


Figura 2: Sistema termico in esame

- Si determini il modello matematico del sistema avente per uscita la temperatura della CPU, T_c e per ingressi la temperatura esterna T_e e il flusso di calore q_J e una sua rappresentazione mediante uno schema a blocchi.

- **Facoltativo**: Si immagini adesso di applicare una ventola al dissipatore e si consideri che l'effetto della ventola sia quello di aumentare il coefficiente di convezione del dissipatore o equivalentemente di abbassarne la resistenza termica in funzione della velocità angolare $\omega(t)$ della ventola. In particolare, si consideri che per effetto della ventola la resistenza del dissipatore valga in prima approssimazione:

  $$R_{de}(\omega(t)) = \frac{1}{K_0 + K_1\omega(t)}$$

  con $K_1, K_2 > 0$. Si determini l'ordine del sistema e in particolare si risponda ai seguenti quesiti:

  – Il sistema è lineare?

– Il sistema è tempo invariante?

Esercizio 7. (Modellistica) ★★★
Si consideri la rete elettrica rappresentata in Figura 3.

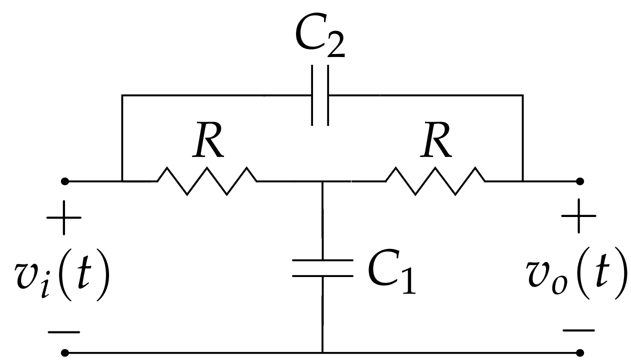


Figura 3: Rete elettrica a T

1. si determini la funzione di trasferimento $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$;
2. si dica al variare dei parametri positivi R, C_1 e C_2 se gli zeri possono essere complessi e coniugati;
3. si dica al variare dei parametri positivi R, C_1e C_2 se i poli del sistema possono essere complessi e coniugati.

Esercizio 8. (Antitrasformata di Laplace) ★★★

Si determini la risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ del sistema retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+4s+5)^2}$$

Si determini inoltre il valore di regime, se esiste, della risposta al gradino $u(t) = 5 \cdot 1(t)$.

Esercizio 9. (Risposta completa sistema LTI, Antitrasformata Laplace) ★★★

Si consideri un sistema lineare e tempo invariante retto dal seguente modello matematico:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = u(t)$$

Si determini:

1. L'uscita del sistema all'ingresso rappresentato in Figura 4 a partire dalle condizioni iniziali $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 0$.
2. Determinare il valore di regime della risposta all'ingresso $u(t) = 1(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $y(0_-) = 10$, $y'(0_-) = -2$.

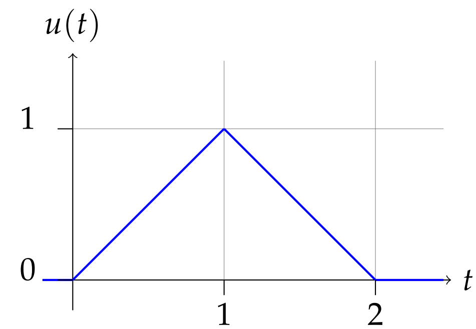


Figura 4: Segnale $u(t)$

Esercizio 10. (Riduzione schemi a blocchi) ★

Si determini il guadagno da $U(s)$ a $Y(s)$ del sistema rappresentato in Figura 5.

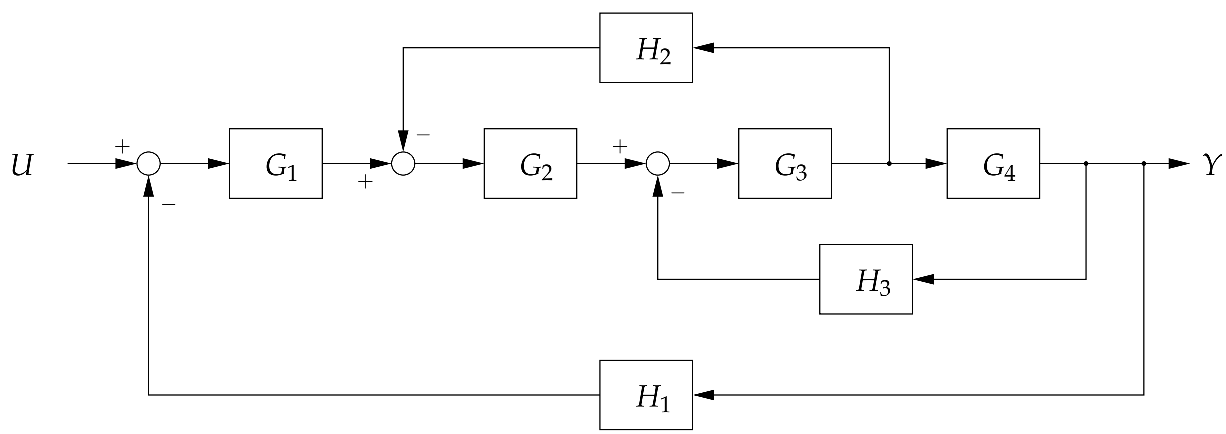


Figura 5: Schema a blocchi del sistema

Esercizio 11. (Riduzione schemi a blocchi) ★★

Con riferimento allo schema a blocchi rappresentato in Figura 6:

1. si determini il guadagno da $U(s)$ a $Y(s)$, ovvero $G_{\circ 1}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
2. si determini il guadagno da $U(s)$ a $X(s)$, ovvero $G_{\circ 2}(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$
3. si determini in particolare la f.d.t. da $U(s)$ a $Y(s)$ quando:

$$G_1(s) = \frac{1}{1+\tau s}\,;\; G_2(s) = \frac{1}{1+2\tau s}\,;\; H_1(s) = 2\,;\; H_2(s) = 1$$

e si specifichi l'ordine del sistema e le sue caratteristiche.

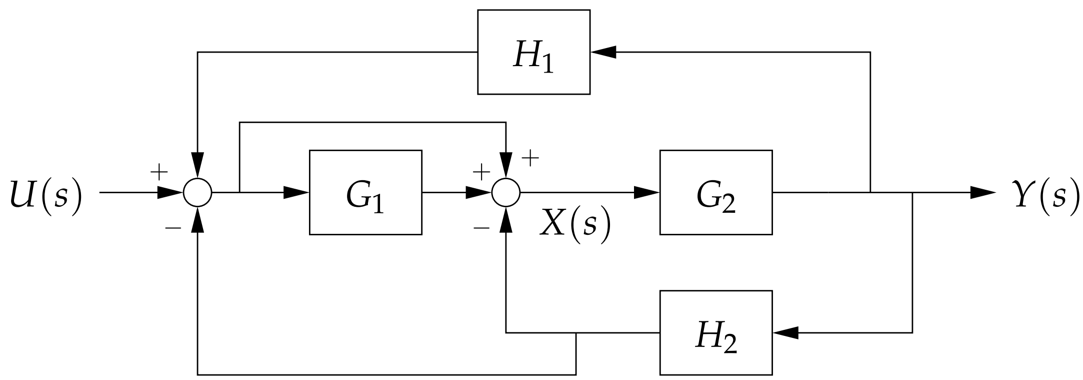


Figura 6: Schema a blocchi del sistema

Esercizio 12. (Riduzione schemi a blocchi) ★★★

Con riferimento allo schema a blocchi in Figura 7 si determininino:

- La funzione di trasferimento ingresso/uscita $G_u(s) = Y(s)/U(s)$
- La funzione di trasferimento tra distrubo e uscita $G_d(s) = Y(s)/D(s)$

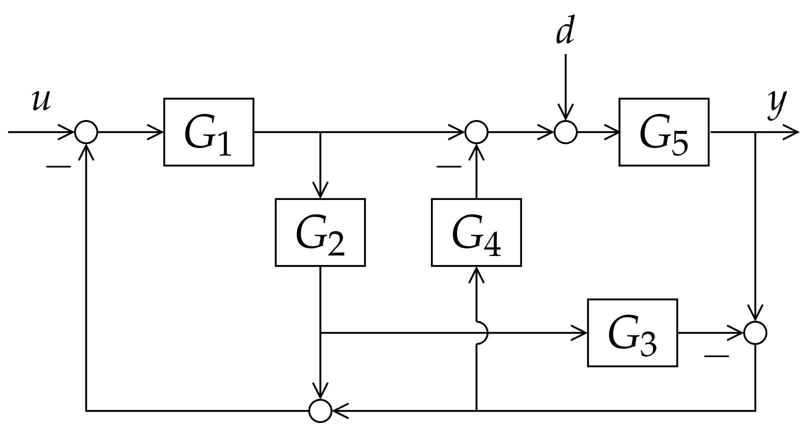


Figura 7: Schema a blocchi

Esercizio 13. (Sistemi del primo ordine) ★

Si consideri un sistema del primo ordine retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

Considerando la risposta al gradino del sistema:

1. si determini il tempo di assestamento al 2%
2. il tempo di ritardo t_d definito come l'istante per il quale l'uscita raggiunge il 50% del valore finale

3. si disegni la risposta al gradino unitario del sistema fornendo il maggior numero possibili di informazioni sul grafico.

4. Si determini la risposta $y(t)$ alla rampa unitaria $r(t) = t \cdot 1(t)$. Definendo $e(t) = y(t) - \frac{3}{2}r(t)$ si determini, se esiste il valore di regime di $e(t)$.

Esercizio 14. (Funzione di trasferimento, proprieta' sistemi LTI) ★★

Un sistema lineare tempo invariante forzato con un ingresso a rampa unitaria $u(t) = t \cdot 1(t)$ a partire da condizione iniziali tutte nulle, produce il seguente segnale di uscita:

$$y(t) = (\frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{7}{4}) \cdot 1(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema, specifichi l'ordine del sistema e di che tipo di sistema si tratta.

2. Determinare la risposta al gradino e se ha senso se ne determini il valore di regime della risposta.

Esercizio 15. (Funzione di trasferimento) ★★★

La risposta al gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante è:

$$y\,(t) = (1 - e^{-2t+2}\sin{(3t-2)})1\,(t-1)$$

Si determini l'espressione della corrispondente f.d.t. del plant$G_p\,(s)$ e si specifichi l'ordine del sistema.

Esercizio 16. (Sistemi del primo ordine) ★★

Si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{1+2\alpha s}{1+2s}$$

Si determinino i valori di α tale che il tempo di assestamento al 2% del sistema sia pari a:

1. $t_{s,2\%} = 8\,\text{sec}$

2. $t_{s,2\%} = 4\,\text{sec}$

3. $t_{s,2\%} = 10\,\text{sec}$

Si disegni la risposta al gradino nel caso in cui $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$, fornendo il maggior numero possibili di informazioni sul grafico.

Esercizio 17. (Sistemi del secondo ordine) ★

Si consideri il seguente sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{12}{s^2+4}$$

Si determini l'uscita del sistema all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$ e se possibile si valuti il valore di regime della risposta.

Esercizio 18. (Sistemi del secondo ordine) ★

Si consideri il sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{408}{s^2 + 8s + 204}$$

1. Si disegni con il maggior dettaglio possibile l'uscita all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$
2. Si determinino la massima sovraelongazione percentuale e il tempo di assestamento al 2%

Esercizio 19. (Sistemi del secondo ordine) ★★★

Considerato il sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 0.4s + \omega_n^2}$$

si determini:

1. Il valore di ω_n tale che il tempo di picco sia pari a 1 sec
2. Con il valore di ω_n determinato al punto 1, si determini la massima sovraelongazione percentuale.
3. Si determini ora il valore di ω_n tale che la massima sovraelongazione percentuale sia pari ad un quarto rispetto a quella ottenuta al punto 2.
4. Si disegni la risposta del sistema ottenuto al punto 3 specificando il maggior numero possibile di informazioni sul grafico

Esercizio 20. (Sistemi del secondo ordine, criterio di dominanza) ★★★★

Si consideri il sistema:

$$G_o(s) = \frac{100k_2^2}{(s + 50)(s^2 + k_1 s + k_2^2)}$$

1. Si determinino i vincoli sulle costanti positive k_1 e k_2 tali che il sistema sia approssimabile a un sistema del secondo ordine sottosmorzato
2. Si determinino i vincoli sulle costanti k_1e k_2 tali che il sistema sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato con massima sovraelongazione percentuale pari al 10%.
3. Si determini la coppia (k_1, k_2) tale che il sistema in esame sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato con massima sovraelongazione percentuale pari al 10% e con un tempo di assestamento al 2% pari a 0.5 sec.

Esercizio 21. (Sistemi del secondo ordine) ★★★★

Un sistema del secondo ordine elementare è stato sottoposto ad un ingresso a gradino e sono stati stimati i seguenti parametri del sistema valutando l'uscita $y(t)$ sull'oscilloscopio:

$$\overline{M}_{P\%} = 50\%$$

$$\bar{t}_{s,2\%} = 1 \text{ sec}$$

in entrambi i casi le misure sono affette da un errore stimato in 5% rispetto al valore nominale.

Si determini la regione $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ del piano complesso nella quale possono essere situati i poli del sistema.

Esercizio 22. (Sistemi di ordine n) ★★★

Si dimostri che la risposta al gradino $y_n(t)$ di un sistema avente n poli coincidenti in $-1/\tau$ con $\tau > 0$ e guadagno statico unitario:

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^n}$$

e' sempre minore (e dunque piu' lenta) della risposta al gradino di un sistema dello stesso tipo, ma di ordine $m < n$. (Suggerimento ricavare la risposta $y_n(t)$ e confrontarla con la risposta $y_m(t)$).

Esercizio 23. (Sistemi del secondo ordine) ★★★

Considerato il sistema lineare tempo invariante retto dalla equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\delta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n u(t)$$

1. Determinare la risposta completa $y(t)$ a fronte di un ingresso a gradino unitario $u(t) = 1(t)$ considerando generiche condizioni iniziali $\frac{dy}{dt}(0_-) = y_1$ e $y(0_-) = y_0$.

2. E' possibile che l'uscita $y(t)$ presenti una sottoelongazione? Se si, si determini la condizione affinche' tale situazione si verifichi. (Suggerimento: si studi l'evoluzione libera del sistema al variare delle condizioni iniziali y_0 e y_1)

Esercizio 24. (Sistemi del secondo ordine) ★★

Si consideri un sistema lineare del secondo ordine privo di zeri. Denominata $\left[t_{p,k}\right]_{k\in\mathbb{N}}$ la successione degli istanti per i quali la risposta al gradino presenta **massimi relativi** si può definire *Decay Ratio* DR_k la quantità adimensionale:

$$DR_k = \frac{y(t_{p,k+1}) - y(\infty)}{y(t_{p,k}) - y(\infty)}$$

DR_k rappresenta il rapporto tra due massimi relativi consecutivi rispetto al valore di regime $y(\infty)$.

- Si determini DR_k in funzione dei parametri del sistema del secondo ordine e si dimostri che tale indice è indipendente da k.

- Che relazione lega il *decay ratio* alla massima sovraelongazione percentuale?

- E′ possibile che il *decay ratio* sia un numero maggiore di 1?

Esercizio 25. (Sistemi del primo e secondo ordine) ★★★

Considerato il seguente sistema del primo ordine:

$$G_1(s) = 5\frac{s+1}{s+5}$$

1. determinare la f.d.t. $G_2(s)$ di un sistema del secondo ordine sottosmorzato privo di zeri e con guadagno statico unitario, che abbia una massima sovraelongazione percentuale del 20% e lo stesso tempo di assestamento al 2% del sistema del primo ordine $G_1(s)$;

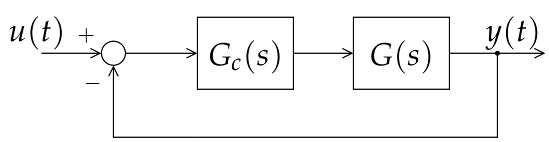
2. disegnare sullo stesso grafico, le risposte al gradino dei due sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ avendo cura di evidenziarne con precisione le principali caratteristiche;

3. considerata ora la seguente f.d.t.:

   $$G_3(s) = G_2(s)(s-2)$$

   dire se il tempo di assestamento al 2% di tale sistema risulta superiore, inferiore o uguale rispetto a quello del sistema $G_2(s)$ giustificando in maniera rigorosa ed esaustiva la risposta.

Esercizio 26. (Sistemi del secondo ordine) ★★



Si consideri il sistema in figura dove $G_c(s) = k$, con k parametro reale positivo e:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E′ possibile 1) inviare come ingresso al sistema in anello chiuso il segnale $u(t) = 1(t)$, 2) agire sul guadagno k, 3) misurare perfettamente il segnale di uscita $y(t)$. Sono stati effettuati i seguenti due esperimenti:

Oss. 1 Aumentando gradualmente il valore di k si osserva che per $k > 9$ l'uscita del sistema inizia a presentare oscillazioni smorzate.

Oss. 2 Per $k > 9$ si osserva che l'uscita $y(t)$ si assesta entro una banda del 2% del valore finale in 4 sec

Si determinino i valori di δ e ω_n. Si trovi il valore della sovraelongazione percentuale per $k = 20$.