

ESERCIZI PER IL CORSO DI  
FONDAMENTI DI AUTOMATICA (MOD. I)

PARTE II

20 dicembre 2018

**Esercizio 1.** (Stabilita') ★

Si consideri un sistema LTI retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s + a}{s(s + b)}$$

1. Si discuta la stabilità del sistema al variare dei due parametri reali  $a$  e  $b$ .
2. Si dica per quali valori di  $a$  e  $b$  il sistema risulta stabile BIBO.

**Esercizio 2.** (Stabilita') ★

Si consideri un sistema LTI la cui funzione di risposta all'impulso  $g(t)$  è pari a:

$$g(t) = (e^{-t} + 1) \cdot 1(t)$$

Si caratterizzi la stabilità del sistema, e la stabilità BIBO giustificando sinteticamente la risposta.

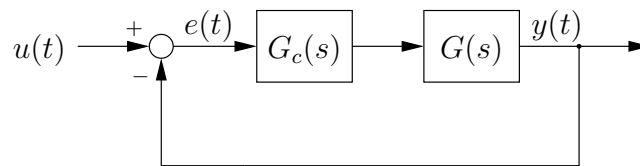
**Esercizio 3.** (Stabilita') ★★

Figura 1:

Si consideri il sistema in Figura 1 dove:

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s - 1)}$$

Osservato che il sistema in anello aperto è instabile, si dica se è possibile stabilizzare il sistema con il controllore  $G_c(s) = K$ .

**Esercizio 4.** (Stabilita', variazioni parametriche) ★★

Si consideri un sistema LTI descritto dalla seguente equazione differenziale lineare:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$$

Il parametro  $a_1$  ha un valore nominale  $\bar{a}_1 = 2$ , ma è soggetto a variazioni attorno a tale valore. Dunque si può dire che  $a_1 = \bar{a}_1 + \varepsilon$ , dove  $\varepsilon$  è la variazione parametrica.

Osservato che il sistema nominale ( $a_1 = \bar{a}_1$ ) è asintoticamente stabile, si determini il range ammissibile della variazione parametrica  $\varepsilon$  affinché la stabilità del sistema si conservi.

**Esercizio 5.** (Stabilità) ★★★

Si consideri il sistema in Figura 1 dove:

$$G(s) = \frac{s^2 - 0.1s + 1}{s^4 + s^3 - 4s^2 + 6s}; G_c(s) = K$$

1. Caratterizzare la stabilità del sistema in anello aperto
2. Si chiuda il sistema in retroazione unitaria e si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso al variare di  $K \in \mathbb{R}$

**Esercizio 6.** (Stabilità) ★★★

Si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s^5 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 2}$$

1. Si caratterizzi la stabilità del sistema ed in caso di instabilità si indichino il numero di poli a parte reale positiva.
2. Si dica se è possibile stabilizzare il sistema impiegando lo schema in retroazione unitaria in Figura 1 dove  $G_c(s) = K$
3. Si dica se è possibile stabilizzare il sistema impiegando lo schema in retroazione unitaria in Figura 1 dove:

$$G_c(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

con  $z, p \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 7.** (Precisione a regime) ★★★

Con riferimento al sistema in Figura 1 sia:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

1. Si determini la costante di un controllore proporzionale  $G_c(s) = K$  che permetta al sistema in anello chiuso di ottenere un errore di posizione inferiore al 5%.
2. Supponendo di impiegare un controllore  $G_c(s) = \frac{K}{s}$ , si dica se è possibile determinare il valore di  $K$  tale che il sistema abbia un errore di velocità inferiore o uguale al 5%.
3. Si determini un controllore  $G_c(s) = K/s$  che è in grado di ottenere un errore di posizione nullo ed il minimo errore di velocità finito.

**Esercizio 8.** (Luogo delle radici) ★★

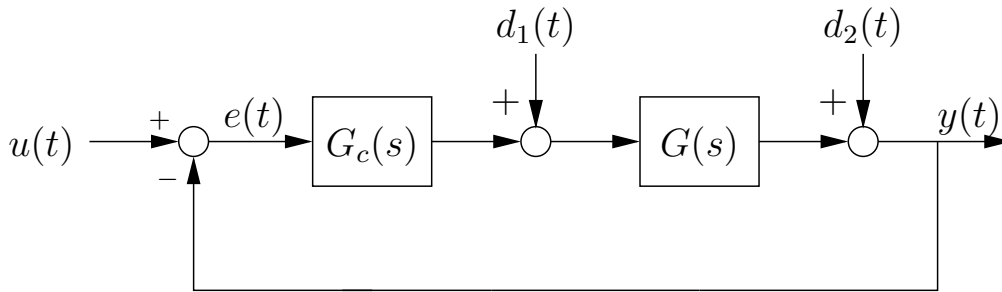


Figura 2:

Si disegni il luogo positivo e negativo della funzione di trasferimento di anello:

$$L(s) = \frac{s + 5}{s(s + 2)(s + 3)^2}$$

indicando il maggior numero di informazioni (punti di intersezione con gli assi, punti di emergenza/confluenza, angoli di arrivo/partenza). Si dica se il punto  $s^* = -1 + j$  appartiene al luogo delle radici positivo.

**Esercizio 9.** (Riduzione schemi a blocchi, stabilità, reiezione disturbi) ★★★

Considerato il sistema in retroazione in Figura 2 per il quale:

$$G_c(s) = \frac{k}{s + 4}; G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

- Si trovino le seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}; G_1(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)}; G_2(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)}; G_3(s) = \frac{E(s)}{U(s)}$$

- Si determini il valore  $k_{crit}$  del guadagno positivo  $k$  tale che il sistema risulti semplicemente stabile.
- Si calcoli il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  in risposta all'ingresso  $u(t) = 5 \cdot 1(t) + 5\delta(t) + e^{-2t}1(t)$  quando  $k = 0.2k_{crit}$
- Si calcoli l'uscita a regime in risposta ai disturbi  $d_1(t) = 1(t)$  e  $d_2(t) = 1(t) + \delta(t)$  quando  $k = 0.2k_{crit}$

**Exercise 10.** (Funzione di trasferimento, precisione a regime) ★★★

La risposta al gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante è:

$$y(t) = k(1 - e^{-2t} \cos(3t))1(t)$$

1. Si determini l'espressione della corrispondente f.d.t. del plant  $G_p(s)$ .
2. Chiuso il sistema in retroazione unitaria, si valuti il valore di  $k$  tale che il sistema in anello chiuso presenti una coppia di poli complessi e coniugati con pulsazione naturale  $\omega_n = 6 \text{ rad/s}$
3. Si determinino errori di posizione, velocità ed accelerazione del sistema in anello chiuso

**Esercizio 11.** (Precisione a regime) ★★

Si consideri un sistema in retroazione non unitaria per il quale si ha:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

Si determinino gli errori di posizione, velocità e accelerazione avendo definito l'errore come  $e(t) = u(t) - \frac{2}{3}y(t)$ .

**Esercizio 12.** (Luogo delle Radici) ★★★

Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello:

$$L(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$$

Si discuta la stabilità del sistema per  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 13.** (Luogo delle Radici, stabilità, Antitrasformata di Laplace) ★★★★★

Considerata seguente funzione di anello:

$$L(s) = \frac{s+1}{(s-3)(s^2+1)}$$

1. Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello
2. Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso per  $k \in \mathbb{R}$
3. Supposto il sistema in retroazione unitaria, determinare la risposta al gradino del sistema quando  $k = 2$ .

**Esercizio 14.** (Luogo delle radici, stabilità, principio di dominanza) ★★★★★

Considerata seguente funzione di anello:

$$L(s) = \frac{(s+2)(s^2+2s+2)}{(s^2+1)^2}$$

1. Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello
2. Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso per  $k \in \mathbb{R}$
3. Si dica se esistono valori di  $k$  per i quali il sistema è approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato

**Esercizio 15.** (Luogo delle radici, antitrasformata di Laplace) ★★★

Si consideri un sistema in retroazione unitaria in cui le f.d.t. del controllore e del plant sono rispettivamente:

$$G_c(s) = 1 + \frac{a}{s}$$

$$G_p(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

1. Si disegni il luogo delle radici al variare di  $a \in \mathbb{R}_+$
2. Si determini il valore di  $a$  tale che il sistema presenti una coppia di poli complessi e coniugati con parte reale  $-0.5$ .
3. In corrispondenza di tale valore di  $a$  si determini la risposta del sistema in anello chiuso al gradino unitario.

**Exercise 16.** ★★★

Considerato la f.d.t. guadagno di anello:

$$L(s) = \frac{(s+z)}{s^2(s+3)(s+2)}$$

1. si determini il valore di  $z$  affinché esista un valore di  $k$  positivo tale che il sistema in anello chiuso abbia una coppia di poli complessi e coniugati in  $-1 \pm j$ .
2. si determini il valore di  $k$  che soddisfa la specifica del punto 1.
3. si determini la posizione dei restanti poli
4. si dica se a fronte di un ingresso a gradino l'uscita forzata del sistema è convergente, divergente o limitata.

**Exercise 17.** ★★★★★

Si consideri un sistema in retroazione il cui plant è un sistema del secondo ordine:

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+4)}$$

Si vogliono determinare i parametri  $k_P$  e  $k_I$  appartenenti al campo dei numeri reali di un controllore di tipo proporzionale-integrale posto in serie a  $G_p(s)$ :

$$G_c(s) = k_P \left( 1 + \frac{k_I}{s} \right)$$

tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

1. Il sistema di controllo sia in grado di reiettare disturbi di carico a rampa
2. Il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile
3. Il sistema in anello chiuso abbia una coppia di poli in  $-1 \pm j$

**(Suggerimento:** si ricordi che  $\arctan \alpha \pm \arctan \beta = \arctan \left( \frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha \beta} \right)$ )