

Controllo dei Robot

Pianificazione di traiettorie

Paolo Lino

Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Politecnico di Bari

e-mail: [paolo.lino \[at\] poliba.it](mailto:paolo.lino@poliba.it)

Pianificazione di traiettorie

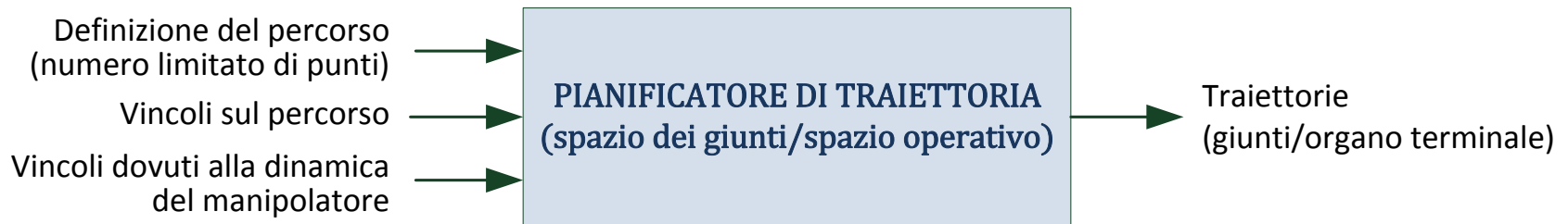
L'obiettivo della pianificazione delle traiettorie è quello di creare gli ingressi di riferimento per il sistema di controllo del moto.

L'utente usualmente specifica un numero di parametri per caratterizzare la traiettoria desiderata; la pianificazione consiste nel generare una sequenza temporale dei valori assunti da una funzione polinomiale, scelta a livello di primitiva, per approssimare la traiettoria desiderata.

Percorso e traiettoria

- Requisito minimo: muoversi da una postura iniziale a una finale assegnata. La transizione deve essere caratterizzata da leggi di moto che richiedono agli attuatori di esplicitare forze generalizzate ai giunti che rispettino vincoli prefissati di ampiezza e che non vadano ad eccitare modi di risonanza meccanica, il più delle volte non modellati. Esigenza di traiettorie a *curvatura regolare*.
- Con il termine **percorso** si indica il luogo dei punti dello spazio dei giunti (operativo) che il manipolatore deve descrivere per eseguire il movimento assegnato;
- Con il termine **traiettoria** indicheremo un percorso al quale è stata assegnata una legge oraria, in pratica sono state assegnate posizione, velocità, e/o accelerazione in ogni suo punto.

Pianificazione della traiettoria



- Nello spazio operativo: consente di affrontare i problemi legati alla presenza di vincoli sul percorso, dovuti alla necessità di evitare regioni dello spazio operativo con ostacoli o difficili da raggiungere (è difficile ricavare le immagini di ostacoli nello spazio dei giunti)
- Nello spazio dei giunti: è più semplice affrontare il passaggio in prossimità di configurazioni singolari

Traiettorie nello Spazio dei giunti

- Le traiettorie generate devono essere poco onerose dal punto di vista computazionale.
- Le posizioni e le velocità dei giunti devono essere delle funzioni continue nel tempo (eventualmente anche la continuità nell'accelerazione).
- Devono essere minimizzati effetti indesiderati, quali ad esempio traiettorie a curvatura non regolare per l'interpolazione di punti che individuano un percorso.

Moto Punto-punto

- Nel moto punto-punto il manipolatore deve muoversi da una configurazione iniziale (delle variabili di giunto) ad una finale in un tempo t_f determinato.
- Il percorso seguito dall'organo terminale in questo caso non è importante.
- L'algoritmo deve generare una traiettoria che, nel rispetto delle caratteristiche generali, sia in grado di ottimizzare lo spostamento del giunto da una posizione all'altra.
- Il primo problema da affrontare è quello della scelta della primitiva di moto.

Traiettorie polinomiali

Nel caso più semplice il moto è definito assegnando gli istanti iniziali e finali, nonché determinate condizioni su posizione, velocità e accelerazione in tali istanti di tempo.

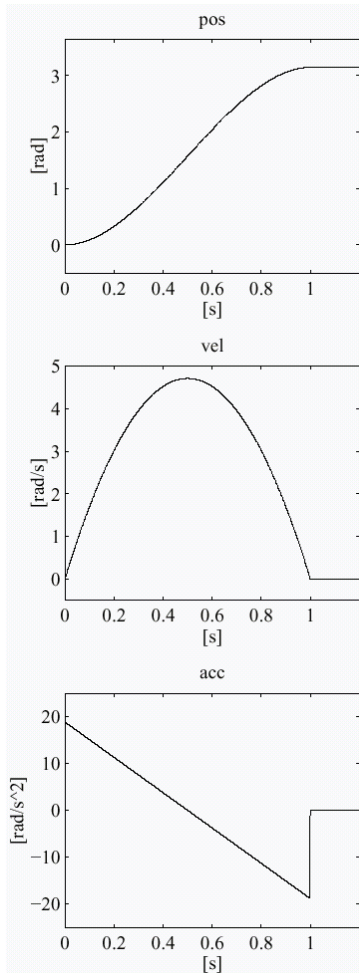
Da un punto di vista matematico, il problema è pertanto quello di determinare una funzione $q = q(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, che soddisfi le condizioni assegnate. Questo problema può essere risolto facilmente considerando una funzione polinomiale del tipo:

$$q(t) = a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Gli $n + 1$ coefficienti ai vengono determinati in modo da soddisfare i vincoli iniziali e finali. Il grado n dipende dal numero di vincoli e dalla della "dolcezza" desiderata del moto risultante.

Poiché solitamente il numero di condizioni imposte è pari, il grado del corrispondente polinomio è dispari (3, 5, 7, ...)

Polinomi cubici



$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Posizione

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Velocità

$$\ddot{q}(t) = 6a_3 t + 2a_2$$

Accelerazione

Polinomi cubici

La disponibilità di 4 coefficienti consente di imporre 4 vincoli:

$$q(t_i) = q_i, \quad q(t_f) = q_f, \quad \dot{q}(t_i) = \dot{q}_i, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t_i) = q_i = a_3 t_i^3 + a_2 t_i^2 + a_1 t_i + a_0 \\ q(t_f) = q_f = a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 \\ \dot{q}(t_i) = \dot{q}_i = 3a_3 t_i^2 + 2a_2 t_i + a_1 \\ \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f = 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_i = a_0 \\ q_f = a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 \\ \dot{q}_i = a_1 \\ \dot{q}_f = 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 \end{array} \right.$$

Polinomi cubici - Esempio

$$[t_i, t_f, q_i, q_f, \dot{q}_i, \dot{q}_f] = [0, 1, 0, \pi, 0, 0]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a_0 \\ \pi = a_3 + a_2 \\ 0 = a_1 \\ 0 = 3a_3 + 2a_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 3\pi \\ a_3 = -2\pi \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q(t) = -2\pi t^3 + 3\pi t^2 \\ \dot{q}(t) = -6\pi t^2 + 6\pi t \\ \ddot{q}(t) = -12\pi t + 6\pi \end{array} \right.$$

Polinomi di 5° grado

Volendo assegnare anche le accelerazioni iniziale e finale:

$$q(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$q(t_i) = q_i = a_5 t_i^5 + a_4 t_i^4 + a_3 t_i^3 + a_2 t_i^2 + a_1 t_i + a_0$$

$$q(t_f) = q_f = a_5 t_f^5 + a_4 t_f^4 + a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0$$

$$\dot{q}(t_i) = \dot{q}_i = 5a_5 t_i^4 + 4a_4 t_i^3 + 3a_3 t_i^2 + 2a_2 t_i + a_1$$

$$\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f = 5a_5 t_f^4 + 4a_4 t_f^3 + 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1$$

$$\ddot{q}(t_i) = \ddot{q}_i = 20a_5 t_i^3 + 12a_4 t_i^2 + 6a_3 t_i + a_2$$

$$\ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f = 20a_5 t_f^3 + 12a_4 t_f^2 + 6a_3 t_f + a_2$$

$$q_i = a_0$$

$$q_f = a_5 t_f^5 + a_4 t_f^4 + a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0$$

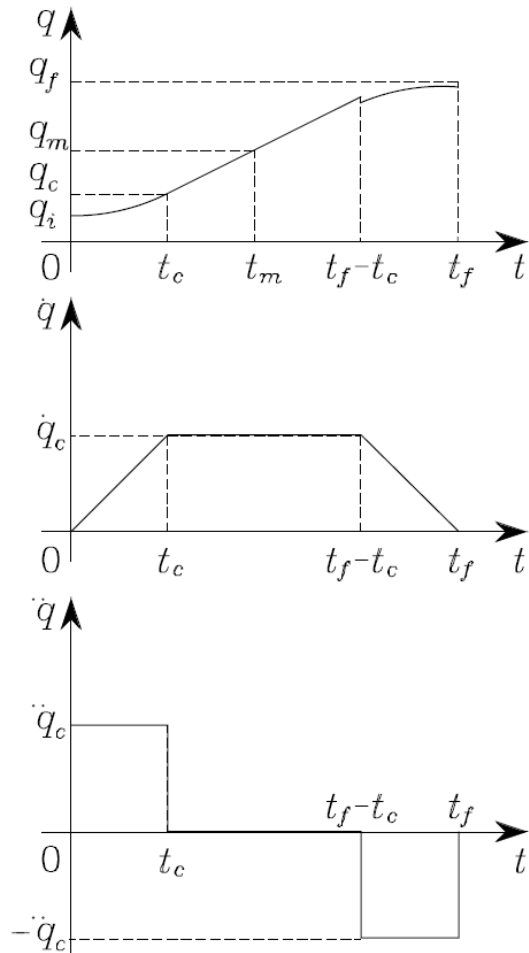
$$\dot{q}_i = a_1$$

$$\dot{q}_f = 5a_5 t_f^4 + 4a_4 t_f^3 + 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1$$

$$\ddot{q}_i = 2a_2$$

$$\ddot{q}_f = 20a_5 t_f^3 + 12a_4 t_f^2 + 6a_3 t_f + a_2$$

Profilo di velocità trapezoidale



Profilo utilizzato in applicazioni industriali

$$q_m = \frac{q_f + q_i}{2}$$

$$t_m = \frac{t_f}{2}$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0$$

Profilo di velocità trapezoidale

Tratto parabolico (accelerazione costante)

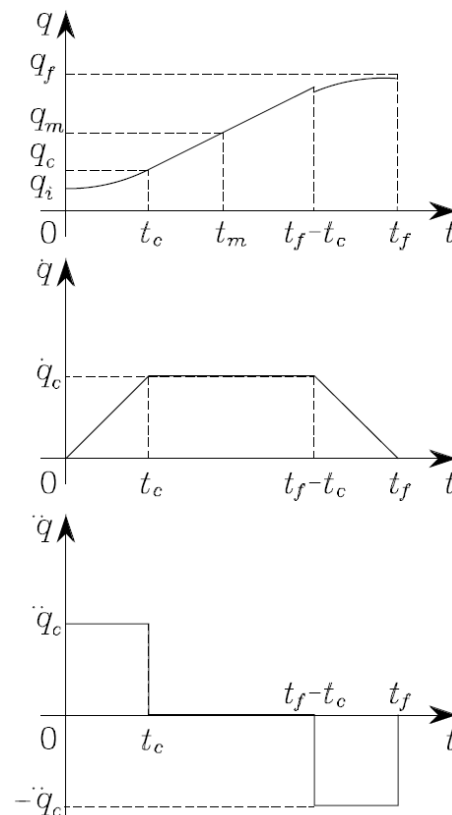
$$\begin{cases} q(t) = q_i + \cancel{\dot{q}_i}t + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 \\ \dot{q}(t) = \cancel{\dot{q}_i} + \ddot{q}_c t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{moto} \\ \text{uniformemente} \\ \text{accelerato} \end{array}$$

➔ $\dot{q}(t_c) = \dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c$

Tratto a velocità costante

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c} \quad \begin{array}{l} \text{moto rettilineo} \\ \text{uniforme} \end{array}$$

➔ $\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$



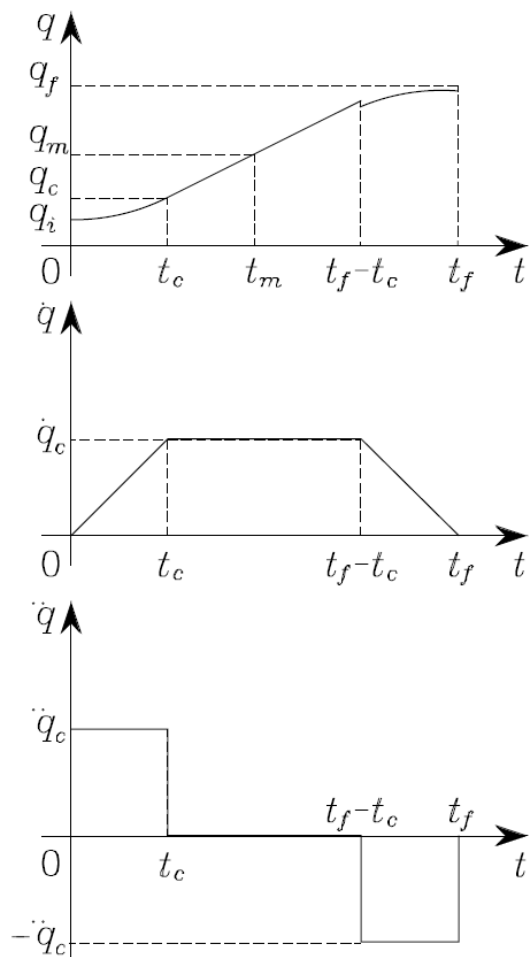
Profilo di velocità trapezoidale

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 \\ \ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c} \end{array} \right. \Rightarrow \ddot{q}_c t_c^2 + \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$$

In genere è assegnata \ddot{q}_c , con vincolo $\text{sgn}(\ddot{q}_c) = \text{sgn}(q_f - q_i)$

$$\Rightarrow t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}} \quad t_c \leq \frac{t_f}{2}$$

Profilo di velocità trapezoidale



$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$$

$$\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c} \geq 0$$

$$\Rightarrow |\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

Quando = scompare il tratto rettilineo
(Profilo triangolare o Bang-bang)

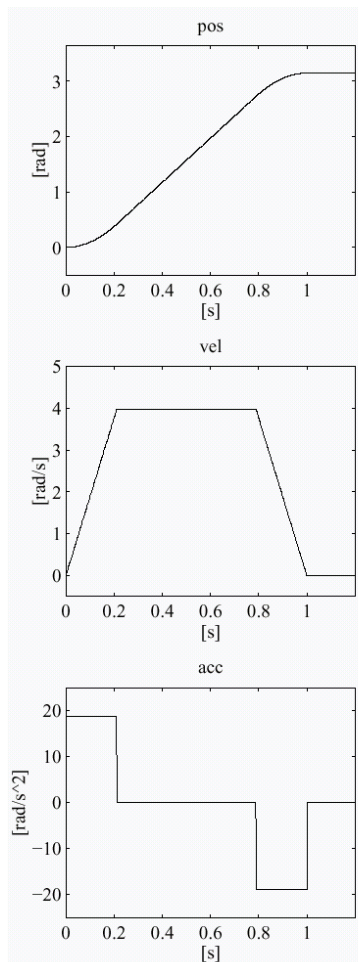
Profilo di velocità trapezoidale

Assegnati t_f , q_i , q_f

Si sceglie $|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$ Si calcola $t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c \left(t - \frac{t_c}{2} \right) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

Profilo di velocità trapezoidale - Esempio



$$[q_i, q_f, t_i, t_f, \ddot{q}_c] = [0, \pi, 0, 1, 6\pi]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\ddot{q}_c| = 6\pi \\ \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2} = 4\pi \end{array} \right. \Rightarrow |\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} = 0.12$$

$$q(t) = \begin{cases} 3\pi t^2 & 0 \leq t \leq 0.12 \\ 0.72\pi(t - 0.06) & 0.12 < t \leq 0.88 \\ \pi - 3\pi(1-t)^2 & 0.88 < t \leq 1 \end{cases}$$

Profilo di velocità trapezoidale – Velocità assegnata

velocità costante $\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot{q}_c| \leq 2 \frac{|q_f - q_i|}{t_f}$ profilo bang-bang

Dalle relazioni

$$\begin{cases} \dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c \\ \ddot{q}_c t_c^2 + \dot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0 \end{cases}$$



$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c}$$

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_c^2}{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}$$

Moto attraverso una sequenza di punti

In molte applicazioni può essere utile specificare un numero di punti maggiore di due per descrivere il cammino:

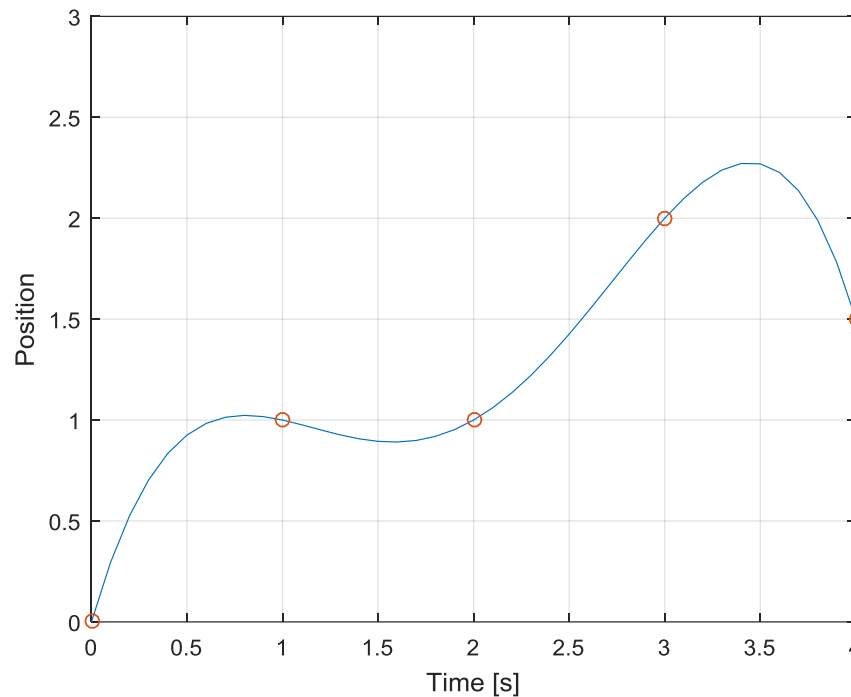
- Posizioni intermedie nel trasporto di un oggetto
- Sequenza di punti nelle operazioni più complesse (per esempio al fine di evitare ostacoli)

Sono assegnati N punti, detti punti di cammino, che devono essere raggiunti dal manipolatore (terna dell'organo terminale) in determinati istanti.

A partire da tali pose nello spazio operativo, si calcola l'insieme dei valori corrispondenti nello spazio dei giunti

Polinomio interpolante

Per ogni variabile di giunto si hanno N vincoli e quindi si può pensare di usare un polinomio di grado $N - 1$.



Polinomio interpolante

Vantaggi:

- La traiettoria così definita attraversa tutti i punti
- La funzione interpolante può essere definita facilmente, poiché occorrono solo gli $n + 1$ coefficienti del polinomio per descriverla
- Le derivate (di ogni ordine) della funzione $q(t)$ così definite sono continue nell'intervallo $[t_0, t_n]$; in particolare, l' n -esima derivata è costante, e quelle successive sono nulle
- La traiettoria interpolante $q(t)$ è unica

Polinomio interpolante

Svantaggi:

- Non è possibile assegnare velocità iniziale e velocità finale
- Al crescere del grado del polinomio aumenta il suo carattere oscillatorio, il che può portare a traiettorie poco naturali per il manipolatore
- L'accuratezza numerica peggiora all'aumentare del grado
- Risulta oneroso risolvere il sistema di equazioni all'aumentare del numero di punti
- I coefficienti del polinomio dipendono da tutti i punti assegnati: cambiando uno dei punti di percorso o aggiungendone uno, occorre ricalcolare tutti i coefficienti

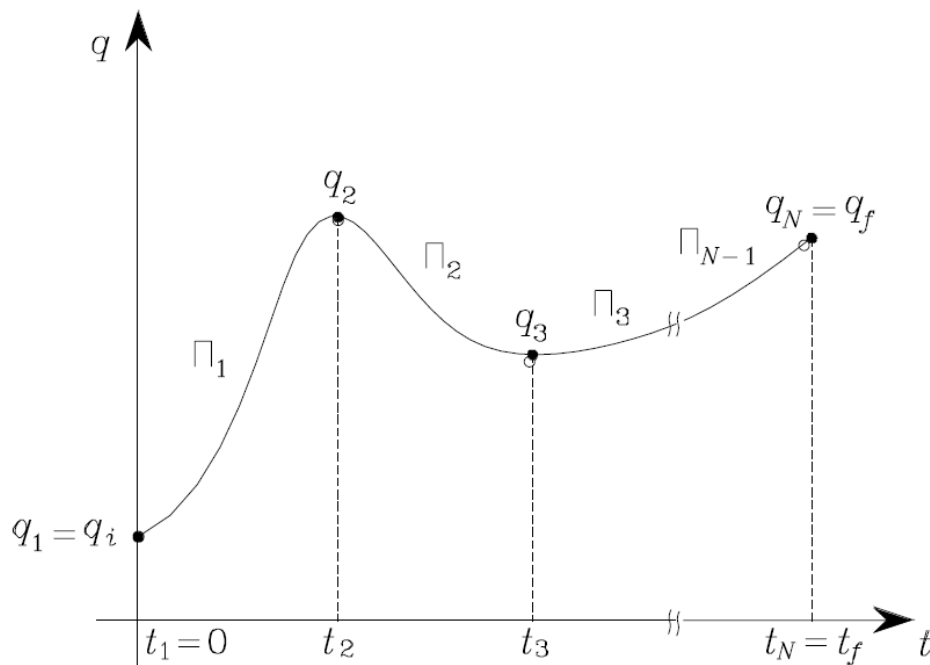
Moto attraverso una sequenza di punti

Questi problemi possono essere superati se, anziché considerare un polinomio di grado N , si considerano un insieme di polinomi interpolatori

- Sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di percorso (polinomi cubici, uniti tra loro nei punti assegnati lungo il percorso)
- Sequenza di polinomi con accelerazione continua nei punti di percorso (spline)
- Sequenza di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità dei punti di via

Sequenza di polinomi con vincoli sulle velocità

- Si considera un insieme di polinomi interpolatori di terzo grado
- Viene specificata la velocità in corrispondenza di ciascun punto del percorso
- La continuità della velocità è garantita ponendo $\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})$

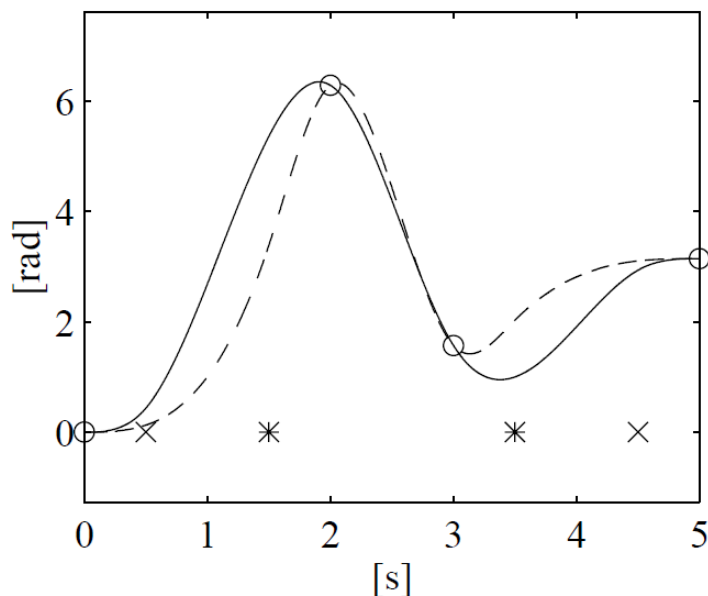


$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_k(t_k) = q_k \\ \Pi_k(t_{k+1}) = q_{k+1} \\ \dot{\Pi}_k(t_k) = \dot{q}_k \\ \dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{q}_{k+1} \end{array} \right.$$

Sequenza di polinomi con accelerazione continua

Le soluzioni precedenti non assicurano la continuità dell'accelerazione nei punti di cammino.

E' possibile garantire la continuità dell'accelerazione nella sequenza di N punti di cammino imponendo quattro vincoli: due vincoli di posizione e due per garantire la continuità di velocità e accelerazione

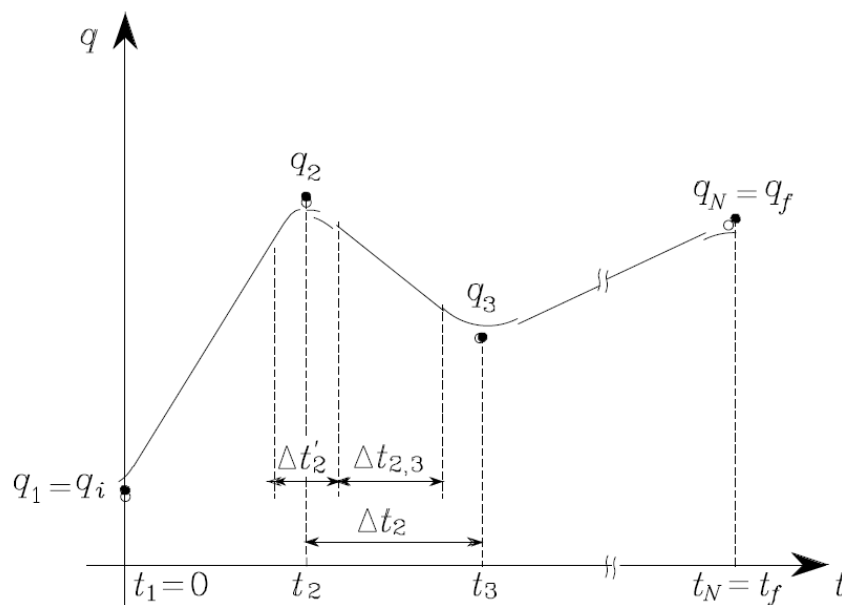


$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{k-1}(t_k) = q_k \\ \Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k) \\ \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k) \end{array} \right.$$

Sequenza di polinomi con passaggio in prossimità dei punti di via

Per semplificare gli algoritmi di generazione delle traiettorie, si connettono i punti di cammino con funzioni lineari. Per evitare discontinuità della derivata prima, la $q(t)$ deve assumere un andamento parabolico nell'intorno di t_k

La traiettoria complessiva risulta costituita da una sequenza di polinomi di primo e secondo grado



$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{k-1,k} &= \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}} \\ \ddot{q}_k &= \frac{\dot{q}_{k+1,k} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k} \end{aligned} \right\}$$

Traiettorie nello spazio operativo

Con la pianificazione di traiettorie nello spazio dei giunti si genera una sequenza temporale di valori che le variabili di giunto devono assumere affinché il manipolatore si porti dalla configurazione iniziale a quella finale (passando eventualmente attraverso configurazioni intermedie).

Il percorso dell'organo terminale durante il movimento non è facilmente prevedibile, a causa degli effetti non-lineari della cinematica diretta.

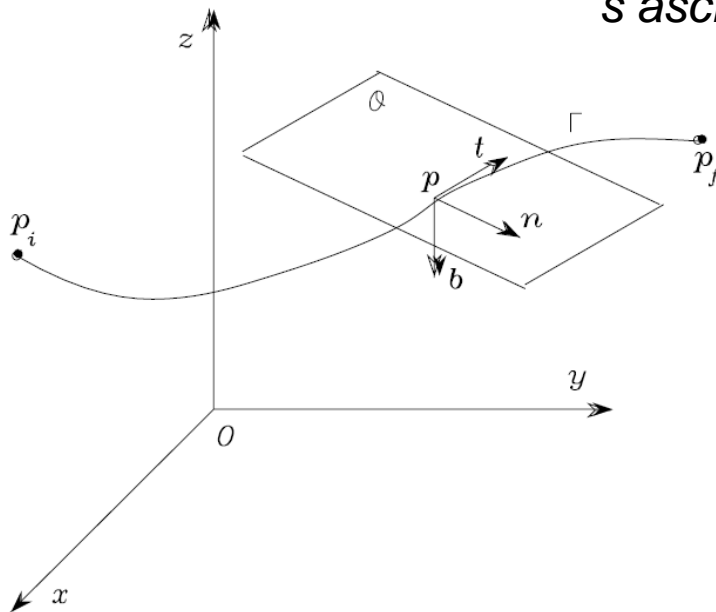
Se si desidera che il moto si sviluppi su un percorso di caratteristiche geometriche definite nello spazio operativo occorre definire le traiettorie direttamente nello stesso spazio.

Traiettorie nello spazio operativo

Se il moto dell'organo terminale deve rispettare una traiettoria con precisione, essa deve poter essere espressa analiticamente. Si fa pertanto uso di *primitive di percorso*

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$$

s ascissa curvilinea



$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$$

Versore tangente

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2}}{\left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \right\|}$$

Versore normale

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$$

Versore binormale
(rende $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ levogira)

Traiettorie nello spazio operativo: Segmento

Esempio: definizione di un segmento nello spazio

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + s \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}$$

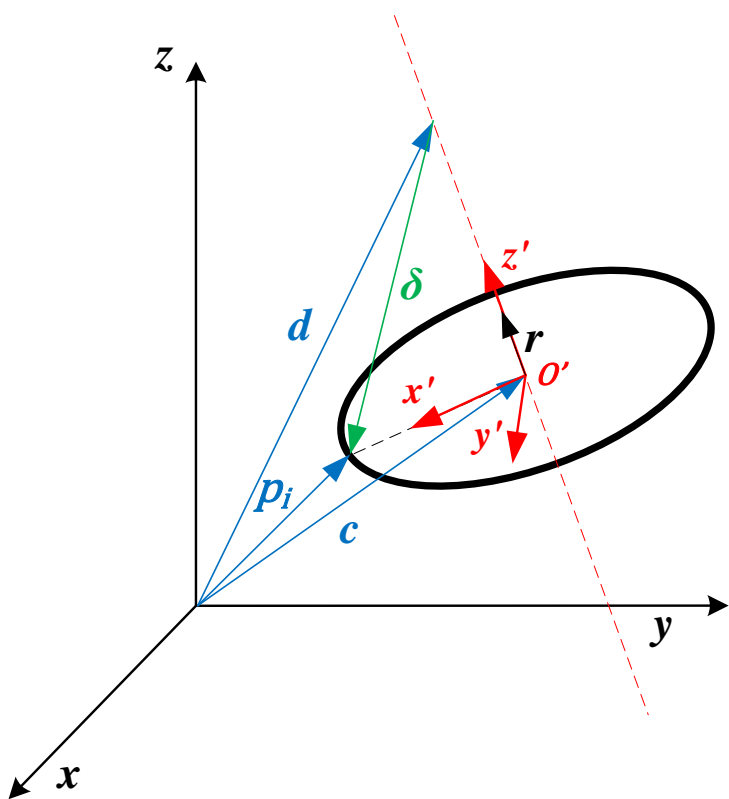
$$\mathbf{p}(s) \Big|_{s=0} = \mathbf{p}_i \quad \mathbf{p}(s) \Big|_{s=\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} = \mathbf{p}_f$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = 0 \quad \rightarrow \text{non è possibile definire } \mathbf{n}$$

Traiettorie nello spazio operativo: Circonferenza

Esempio: definizione di una circonferenza nello spazio



$$\delta = p_i - d$$

Affinché p_i non si trovi sull'asse:

$$|\delta^T r| < \|\delta\|$$

In tal caso: $c = d + (\delta^T r)r$

Parametri significativi

- r versore dell'asse
- d vettore posizione di un punto dell'asse
- p_i vettore posizione di un punto della circonferenza

Traiettorie nello spazio operativo: Circonferenza

$O' - x'y'z'$

O' coincide con il centro della circonferenza

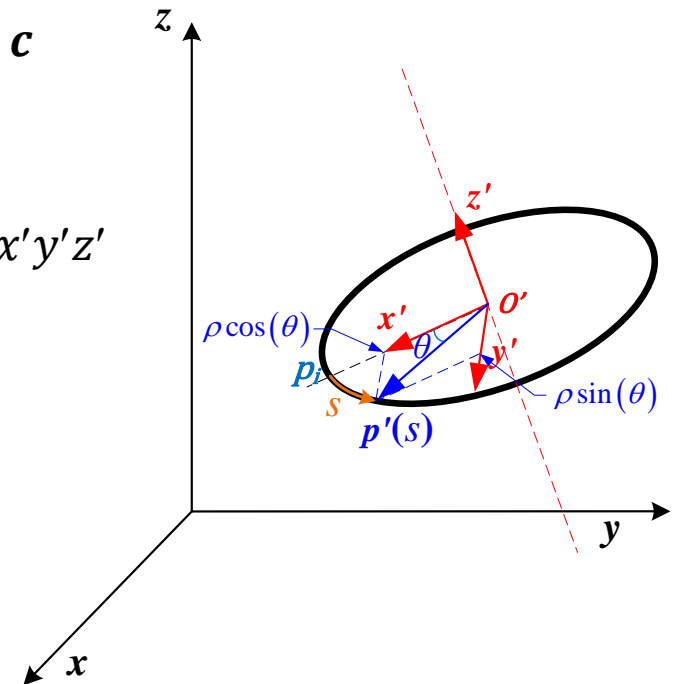
x' è orientato lungo la direzione del vettore $\mathbf{p}_i - \mathbf{c}$

z' è diretto lungo \mathbf{r}

Rappresentazione parametrica nella terna $O' - x'y'z'$

$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}\|$$



Traiettorie nello spazio operativo: Circonferenza

Rappresentazione parametrica nella terna $O - xyz$

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R}\mathbf{p}'(s)$$

$$\mathbf{R} = [x' \quad y' \quad z']$$

$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Traiettorie di posizione e di orientamento

Traiettoria nello spazio operativo

Generazione di una traiettoria nello spazio operativo: individuare una funzione $\mathbf{x}(t)$ che porti la terna dell'organo terminale dalla configurazione iniziale a quella finale in un tempo t_f , lungo un percorso assegnato con una specifica legge di moto.

Si considerano separatamente i problemi della generazione delle traiettorie di posizione e orientamento

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \boldsymbol{\phi}(t) \end{bmatrix}$$

Posizione

Posizione $\mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$ $s(t)$ legge oraria interpolata $\dot{\mathbf{p}} = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{s} \mathbf{t}$

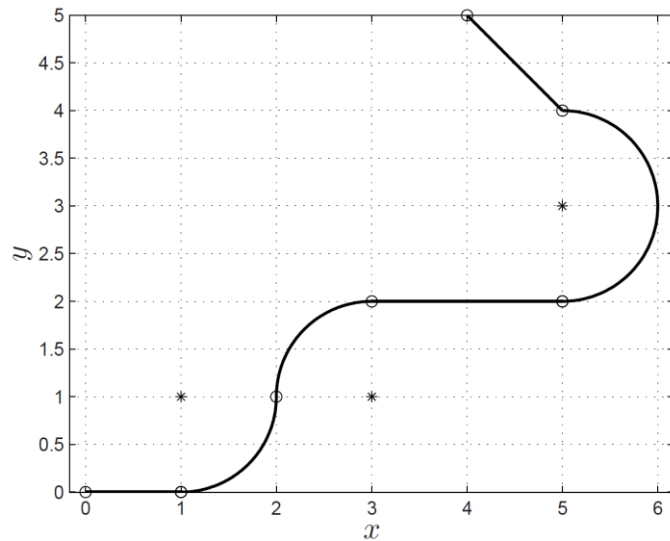
Segmento rettilineo

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + s \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} \quad \dot{\mathbf{p}} = \dot{s} \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} = \dot{s} \mathbf{t} \quad \ddot{\mathbf{p}} = \ddot{s} \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} = \ddot{s} \mathbf{t}$$

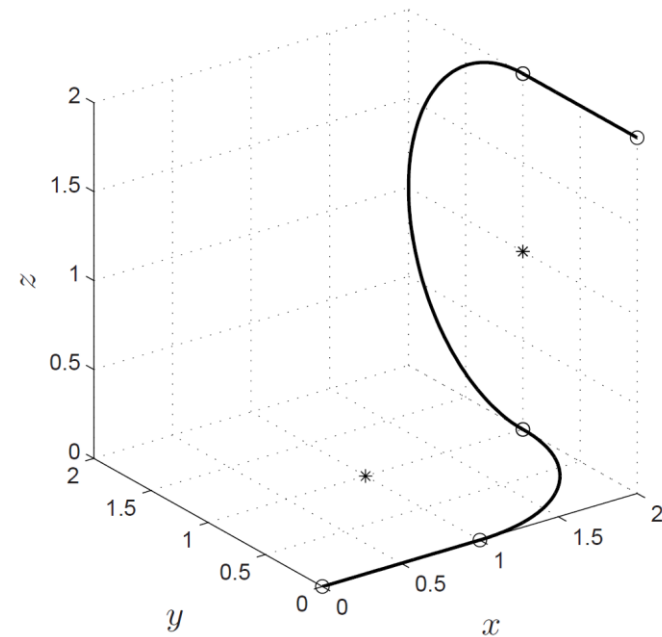
Circonferenza

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \dot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\frac{\dot{s}^2}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) - \ddot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{\dot{s}^2}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \ddot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posizione



	p_0	p_1	z_1	d	θ
line	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$[1 \ 0 \ 0]^T$			
circle	$[1 \ 0 \ 0]^T$		$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[1 \ 1 \ 0]^T$	$\pi/2$
circle	$[2 \ 1 \ 0]^T$		$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[3 \ 1 \ 0]^T$	$-\pi/2$
line	$[3 \ 2 \ 0]^T$	$[5 \ 2 \ 0]^T$			
circle	$[5 \ 3 \ 0]^T$		$[0 \ 0 \ 1]^T$	$[5 \ 3 \ 0]^T$	π
line	$[5 \ 4 \ 0]^T$	$[4 \ 5 \ 0]^T$			



Orientamento

Angoli di Eulero

$$\phi = (\varphi, \vartheta, \psi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(s) = \phi_i + s \frac{(\phi_f - \phi_i)}{\|\phi_f - \phi_i\|} \\ \dot{\phi} = \dot{s} \frac{(\phi_f - \phi_i)}{\|\phi_f - \phi_i\|} \\ \ddot{\phi} = \ddot{s} \frac{(\phi_f - \phi_i)}{\|\phi_f - \phi_i\|} \end{array} \right.$$

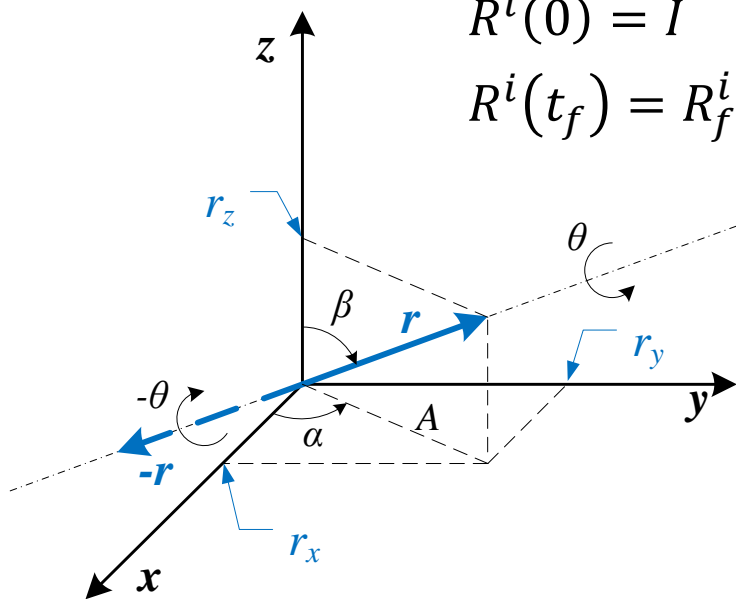
Orientamento

Rotazione attorno ad un asse arbitrario

$$R_f = R_i R_f^i \quad \Rightarrow \quad R_f^i = R_i^{-1} R_f = R_i^T R_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$R^i(0) = I$$

$$R^i(t_f) = R_f^i(\theta_f)$$



$$\left\{ \begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \\ \mathbf{r} &= \frac{1}{2\sin(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

Orientamento

Rotazione attorno ad un asse arbitrario

$$R_r^i(\theta(t)) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_x r_y(1 - c_\theta) - r_z s_\theta & r_x r_z(1 - c_\theta) + r_y s_\theta \\ r_x r_y(1 - c_\theta) + r_z s_\theta & r_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) - r_x s_\theta \\ r_x r_z(1 - c_\theta) - r_y s_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) + r_x s_\theta & r_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix}$$

$$R(t) = R_i R_r^i(\theta(t))$$

Una volta specificati con $p(t)$ e $\phi(t)$ o $R(t)$ un percorso e una traiettoria nello spazio operativo, l'applicazione di tecniche per l'inversione cinematica consente di ricavare le traiettorie corrispondenti $q(t)$ nello spazio dei giunti.