Esercizi per il corso di Fondamenti di Automatica I

Ing. Elettronica N.O.

Docente: Dott. Ing. Luca De Cicco

2 Febbraio 2009

Exercise 1.

Si determini la trasformata di Laplace dei segnali:

$$x_1(t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

con $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Exercise 2.

Si determini la trasformata di Laplace del segnale causale:

$$x(t) = te^{-at} \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

con $a \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Exercise 3.

1. Considerato il segnale $x(t)$ in Figura 1 se ne determini la trasformata di Laplace $X(s)$.
2. Si consideri ora il segnale $x'(t)$ (derivata generalizzata) e se ne determini la trasformata di Laplace.

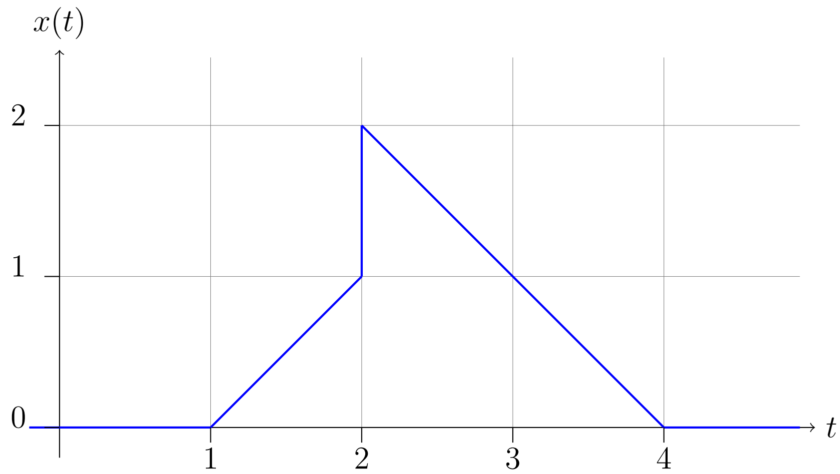

Figura 1. Segnale $x(t)$

Exercise 4.

Sia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

la funzione di trasferimento di un sistema LTI.

1. Si determini la risposta forzata del sistema all'ingresso:

$$u(t) = e^{-at}$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ (con $a = 0$ incluso).

2. Si specifichi in particolare cosa accade per $a = 1$, $a = 0$ e $a = 2$.

Exercise 5.

Considerata la seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+4)}$$

si determini:

1. La risposta forzata all'ingresso $u(t) = 1(t)$
2. La risposta all'impulso $u(t) = \delta(t)$
3. Il valor finale della risposta del sistema al segnale $1(t) + 1(t-1)$.

Exercise 6.

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 2, dove R_{cd} rappresenta la resistenza termica della giunzione tra la CPU (colorata in bianco) e il dissipatore (colorato in grigio), R_{de} quella tra il dissipatore e l'ambiente esterno, C_c la capacità termica della

CPU, C_d quella del dissipatore e si considera infinita la capacità termica dell'ambiente esterno.

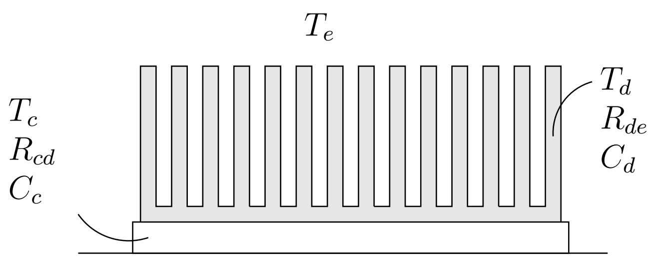

Figura 2. Sistema termico in esame

• Si determini il modello matematico del sistema avente per uscita la temperatura della CPU, T_c e per ingressi la temperatura esterna T_e e il flusso di calore q_J e una sua rappresentazione mediante uno schema a blocchi.

• **Facoltativo**: Si immagini adesso di applicare una ventola al dissipatore e si consideri che l'effetto della ventola sia quello di aumentare il coefficiente di convezione del dissipatore o equivalentemente di abbassarne la resistenza termica in funzione della velocità angolare $\omega(t)$ della ventola. In particolare, si consideri che per effetto della ventola la resistenza del dissipatore valga in prima approssimazione:

$$R_{de}(\omega(t)) = \frac{1}{K_0 + K_1\omega(t)}$$

con $K_1, K_2 > 0$. Si determini l'ordine del sistema e in particolare si risponda ai seguenti quesiti:

• Il sistema è lineare?
• Il sistema è tempo invariante?

Exercise 7.

Si consideri la rete elettrica rappresentata in Figura 3.

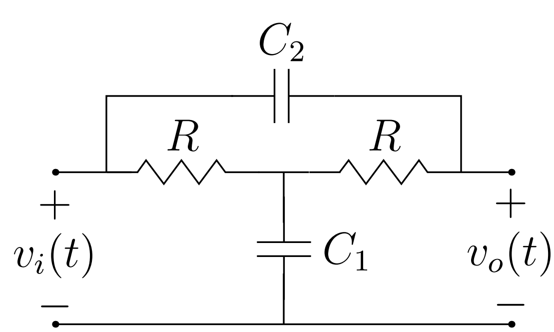

Figura 3. Rete elettrica a T

1. si determini la funzione di trasferimento $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$;

2. si dica al variare dei parametri positivi R, C_1 e C_2 se gli zeri possono essere complessi e coniugati;

3. si dica al variare dei parametri positivi R, C_1e C_2 se i poli del sistema possono essere complessi e coniugati.

Exercise 8.

Si determini la risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ del sistema retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+4s+5)^2}$$

Si determini inoltre il valore di regime, se esiste, della risposta al gradino $u(t) = 5 \cdot 1(t)$.

Exercise 9.

Si consideri un sistema lineare e tempo invariante retto dal seguente modello matematico:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = u(t)$$

Si determini:

1. L'uscita del sistema all'ingresso rappresentato in Figura 4 a partire dalle condizioni iniziali $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 0$.

2. Determinare il valore di regime della risposta all'ingresso $u(t) = 1(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $y(0_-) = 10$, $y'(0_-) = -2$.

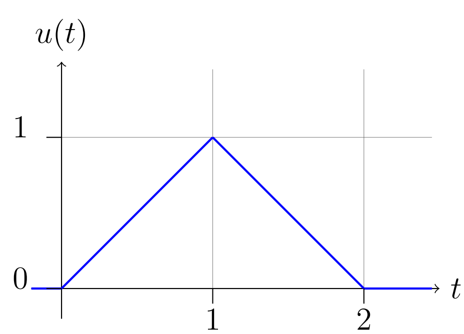

Figura 4. Segnale $u(t)$

Exercise 10.

Si determini il guadagno da $U(s)$ a $Y(s)$ del sistema rappresentato in Figura 5.

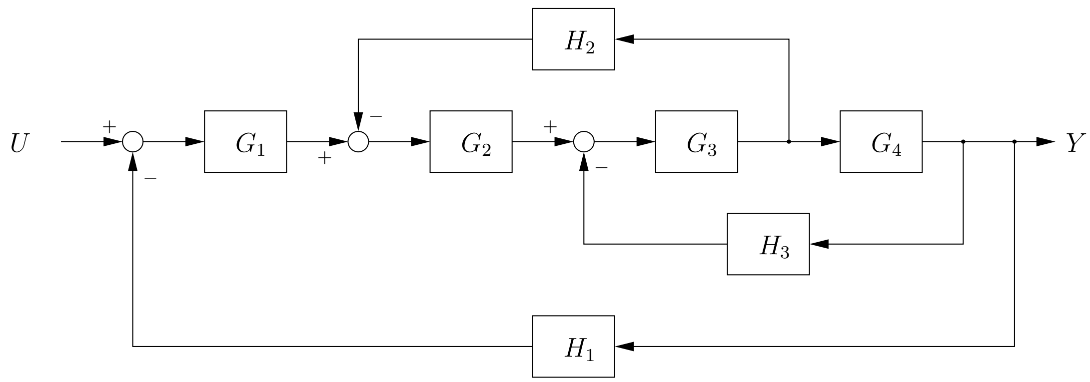

Figura 5. Schema a blocchi del sistema

Exercise 11.

Con riferimento allo schema a blocchi rappresentato in Figura 6:

1. si determini il guadagno da $U(s)$ a $Y(s)$, ovvero $G_{\circ 1}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
2. si determini il guadagno da $U(s)$ a $X(s)$, ovvero $G_{\circ 2}(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$
3. si determini in particolare la f.d.t. da $U(s)$ a $Y(s)$ quando:

$$G_1(s) = \frac{1}{1+\tau s}\,;\; G_2(s) = \frac{1}{1+2\tau s}\,;\; H_1(s) = 2\,;\; H_2(s) = 1$$

e si specifichi l'ordine del sistema e le sue caratteristiche.

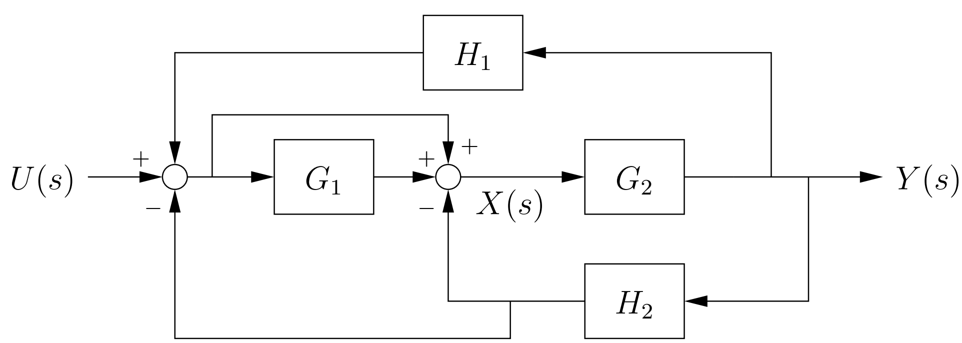

Figura 6. Schema a blocchi del sistema

Exercise 12.

Si consideri un sistema del primo ordine retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

Considerando la risposta al gradino del sistema:

1. si determini il tempo di assestamento al 2%

2. il tempo di ritardo t_d definito come l'istante per il quale l'uscita raggiunge il 50% del valore finale

3. si disegni la risposta al gradino unitario del sistema fornendo il maggior numero possibili di informazioni sul grafico.

4. Si determini la risposta $y(t)$ alla rampa unitaria $r(t) = t \cdot 1(t)$. Definendo $e(t) = y(t) - \frac{3}{2}r(t)$ si determini, se esiste il valore di regime di $e(t)$.

Exercise 13.

Un sistema lineare tempo invariante forzato con un ingresso a rampa unitaria $u(t) = t \cdot 1(t)$ a partire da condizione iniziali tutte nulle, produce il seguente segnale di uscita:

$$y(t) = (\frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{7}{4}) \cdot 1(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema, specifichi l'ordine del sistema e di che tipo di sistema si tratta.

2. Determinare la risposta al gradino e se ha senso se ne determini il valore di regime della risposta.

Exercise 14.

Si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{1 + 2\alpha s}{1 + 2s}$$

Si determini il valore di α tale che il tempo di assestamento al 2% del sistema sia pari a:

1. $t_{s,2\%} = 8\,\mathrm{sec}$
2. $t_{s,2\%} = 4\,\mathrm{sec}$
3. $t_{s,2\%} = 10\,\mathrm{sec}$

Si disegni la risposta al gradino nel caso in cui $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$, fornendo il maggior numero possibili di informazioni sul grafico.

Exercise 15.

Si consideri il seguente sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 4}$$

Si determini l'uscita del sistema all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$ e se possibile si valuti il valore di regime della risposta.

Exercise 16.

Si consideri il sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{408}{s^2 + 8s + 204}$$

1. Si disegni con il maggior dettaglio possibile l'uscita all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$
2. Si determinino la massima sovraelongazione percentuale e il tempo di assestamento al 2%

Exercise 17.

Considerato il sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 0.4s + \omega_n^2}$$

si determini:

1. Il valore di ω_n tale che il tempo di picco sia pari a 1 sec
2. Con il valore di ω_n determinato al punto 1, si determini la massima sovraelongazione percentuale.
3. Si determini ora il valore di ω_n tale che la massima sovraelongazione percentuale sia pari ad un quarto rispetto a quella ottenuta al punto 2.
4. Si disegni la risposta del sistema ottenuto al punto 3 specificando il maggior numero possibile di informazioni sul grafico

Exercise 18.

Si consideri il sistema:

$$G_o(s) = \frac{100k_2^2}{(s+50)(s^2 + k_1 s + k_2^2)}$$

si vogliono determinare i valori delle costanti k_1 e k_2 tali che:

1. Si determinino i vincoli sulle costanti positive k_1 e k_2 tali che il sistema sia approssimabile a un sistema del secondo ordine sottosmorzato
2. Si determinino i vincoli sulle costanti k_1e k_2 tali che il sistema sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato con massima sovraelongazione percentuale pari al 10%.
3. Si determini la coppia (k_1, k_2) tale che il sistema in esame sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato con massima sovraelongazione percentuale pari al 10% e con un tempo di assestamento al 2% pari a 0.5 sec.

Exercise 19.

Un sistema del secondo ordine elementare è stato sottoposto ad un ingresso a gradino e sono stati stimati i seguenti parametri del sistema valutando l'uscita $y(t)$ sull'oscilloscopio:

$$\overline{M}_{P\%} = 50\%$$

$$\bar{t}_{s,2\%} = 1 \ \text{sec}$$

in entrambi i casi le misure sono affette da un errore stimato in 5% rispetto al valore nominale della stima.

Si determini la regione $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ del piano complesso nella quale possono essere situati i poli del sistema.

Exercise 20.

Si consideri un sistema LTI retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+a}{s(s+b)}$$

1. Si discuta la stabilità del sistema al variare dei due parametri reali a e b.
2. Si dica per quali valori di a e b il sistema risulta stabile BIBO.

Exercise 21.

Si consideri un sistema LTI la cui funzione di risposta all'impulso $g(t)$ è pari a:

$$g(t) = (e^{-t} + 1) \cdot 1(t)$$

Si caratterizzi la stabilità del sistema, e la stabilità BIBO giustificando sinteticamente la risposta.

Exercise 22.

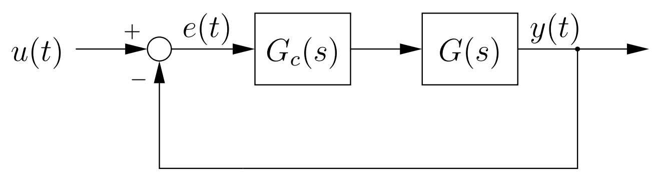

Figura 7.

Si consideri il sistema in Figura 7 dove:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}$$

Osservato che il sistema in anello aperto è instabile, si dica se è possibile stabilizzare il sistema con il controllore $G_c(s) = K$.

Exercise 23.

Si consideri il sistema in Figura 7 dove:

$$G(s) = \frac{s^2 - 0.1s + 1}{s^4 + s^3 - 4s^2 + 6s} \; ; \; G_c(s) = K$$

1. Caratterizzare la stabilità del sistema in anello aperto
2. Si chiuda il sistema in retroazione unitaria e si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso al variare di $K \in \mathbb{R}$

Exercise 24.

Si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s^5 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 2}$$

1. Si caratterizzi la stabilità del sistema ed in caso di instabilità si indichino il numero di poli a parte reale positiva.
2. Si dica se è possibile stabilizzare il sistema impiegando lo schema in retroazione unitaria in Figura 7 dove $G_c(s) = K$
3. Si dica se è possibile stabilizzare il sistema impiegando lo schema in retroazione unitaria in Figura 7 dove:

$$G_c(s) = \frac{s+z}{s+p}$$

con $z, p \in \mathbb{R}$.

Exercise 25.

Con riferimento al sistema in Figura 7 sia:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

1. Si determini la costante di un controllore proporzionale $G_c(s) = K$ che permetta al sistema in anello chiuso di ottenere un errore di posizione inferiore al 5%.
2. Supponendo di impiegare un controllore $G_c(s) = \frac{K}{s}$, si dica se è possibile determinare il valore di K tale che il sistema abbia un errore di velocità inferiore o uguale al 5%.
3. Si determini un controllore $G_c(s) = K/s$ che è in grado di ottenere un errore di posizione nullo ed il minimo errore di velocità finito.

Exercise 26.

Si disegni il luogo positivo e negativo della funzione di trasferimento di anello:

$$L(s) = \frac{s+5}{s(s+2)(s+3)^2}$$

indicando il maggior numero di informazioni (punti di intersezione con gli assi, punti di emergenza/confluenza, angoli di arrivo/partenza). Si dica se il punto $s^* = -1 + j$ appartiene al luogo delle radici positivo.

Exercise 27.

Considerato il sistema in retroazione in Figura 8 per il quale:

$$G_c(s) = \frac{k}{s+4}\,;\, G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

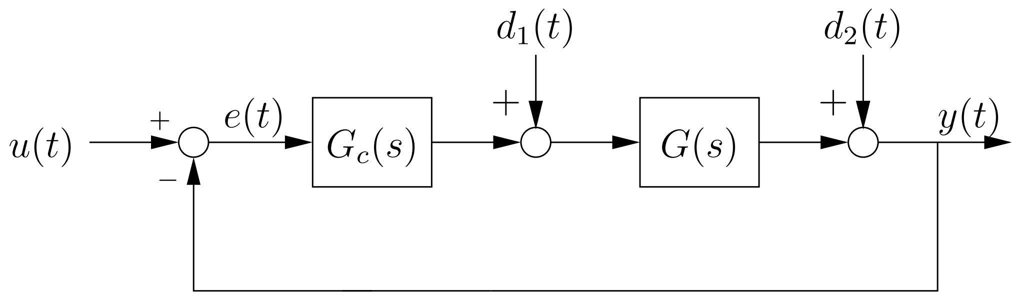

Figura 8.

- Si trovino le seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}\,;\; G_1(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)}\,;\; G_2(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)}\,;\; G_3(s) = \frac{E(s)}{U(s)}$$

- Si determini il valore k_{crit} del guadagno positivo k tale che il sistema risulta semplicemente stabile.
- Si calcoli il valore a regime dell'uscita $y(t)$ in risposta all'ingresso $u(t) = 5 \cdot 1(t) + 5\delta(t) + e^{-2t}1(t)$ quando $k = 0.2k_{crit}$
- Si calcoli l'uscita a regime in risposta ai disurbi $d_1(t) = 1(t)$ e $d_2(t) = 1(t) + \delta(t)$ quando $k = 0.2k_{crit}$

Exercise 28.

La risposta al gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante è:

$$y\,(t) = (1 - e^{-2t+2}\sin{(3t-2)})1\,(t-1)$$

Si determini l'espressione della corrispondente f.d.t. del plant$G_p\,(s)$ e si specifichi l'ordine del sistema.

Exercise 29.

La risposta al gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante è:

$$y\,(t) = k(1 - e^{-2t}\cos{(3t)})1\,(t)$$

1. Si determini l'espressione della corrispondente f.d.t. del plant $G_p\,(s)$.
2. Chiuso il sistema in retroazione unitaria, si valuti il valore di k tale che il sistema in anello chiuso presenti una coppia di poli complessi e coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 6\,\mathrm{rad/s}$
3. Si determinino errori di posizione, velocità ed accelerazione del sistema in anello chiuso

Exercise 30.

Si consideri un sistema in retroazione non unitaria per il quale si ha:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$
$$H(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

Si determinino gli errori di posizione, velocita' e accelerazione avendo definito l'errore come $e(t) = u(t) - \frac{2}{3}y(t)$.

Exercise 31.

Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello:

$$L(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$$

Si discuta la stabilità del sistema per $k \in \mathbb{R}$.

Exercise 32.

Considerata seguente funzione di anello:

$$L(s) = \frac{s+1}{(s-3)(s^2+1)}$$

1. Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello
2. Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso per $k \in \mathbb{R}$
3. Determinare la risposta al gradino del sistema quando $k = 1/2$.

Exercise 33.

Considerata seguente funzione di anello:

$$L(s) = \frac{(s+2)(s^2+2s+2)}{(s^2+1)^2}$$

1. Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello
2. Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso per $k \in \mathbb{R}$
3. Si dica per quali valori di k il sistema è approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato

Exercise 34.

Si consideri un sistema in retroazione unitaria in cui le f.d.t. del controllore e del plant sono rispettivamente:

$$G_c(s) = 1 + \frac{a}{s}$$
$$G_p(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

1. Si disegni il luogo delle radici al variare di $a \in \mathbb{R}_+$
2. Si determini il valore di a tale che il sistema presenti una coppia di poli complessi e coniugati con parte reale -0.5.
3. In corrispondenza di tale valore di a si determini la risposta del sistema in anello chiuso al gradino unitario.