PARTE N. 1

Introduzione al Corso

L'obiettivo del corso di Teoria dei Sistemi è quello di fornire un insieme di strumenti e metodi matematici di carattere generale e astratto per l'analisi del comportamento dinamico di sistemi complessi. Per sistema s'intende un qualsiasi "oggetto" che interagisce con l'ambiente circostante e/o con altri sistemi. Il comportamento dinamico di un sistema è descritto dall'andamento temporale delle varabili che lo descrivono. L'ambiente agisce sul sistema tramite variabili che sono dette varabili d'ingresso del sistema. Nella Figura 1 è rappresentato un sistema su cui l'ambiente esterno agisce tramite le variabili d'ingresso u_i che sono rappresentate da frecce entranti nel sistema. Le variabili che descrivono il comportamento del sistema sono rappresentate tramite le frecce uscenti y_i e sono dette variabili d'uscita.

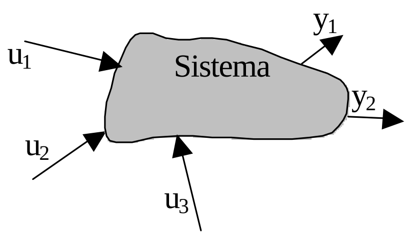


Fig. 1

La descrizione di un sistema in termini di ingressi ed uscite è detta descrizione *ingresso uscita*. La descrizione matematica del comportamento di un sistema è detta *modello matematico* del sistema. Tipicamente il modello matematico di un sistema consiste in una equazione differenziale che stabilisce una relazione tra le variabili d'ingresso e le variabili d'uscita di un sistema. Il legame matematico consente di determinare le uscite a partire dagli ingressi e quindi di studiare la dinamica o il comportamento di un sistema in un certo ambiente. I sistemi a singolo ingresso e singola uscita sono detti sistemi SISO (single-input single-output). I sistemi a più ingressi e a più uscite sono detti MIMO (multi-input multi-output).

La metodologia matematica consente di affrontare in modo astratto e unificato lo studio di sistemi di natura differente ma accomunati dalle stesse proprietà matematiche. Un esempio noto dallo studio della Fisica è quello dei sistemi meccanici ed elettrici. Tali sistemi sono descritti da equazioni differenziali dello stesso tipo per cui si parla di sistemi analoghi.

Esempio: Modello matematico di un sistema meccanico

Si consideri il sistema meccanico in Fig. 2. Il sistema è composto da una massa *M* che schematizza le proprietà d'inerzia del sistema, una molla di costante elastica *k* che schematizza l'elasticità dell'ancoraggio e uno smorzatore di costante *b* che schematizza il movimento della massa in un mezzo viscoso (Fig. 2)

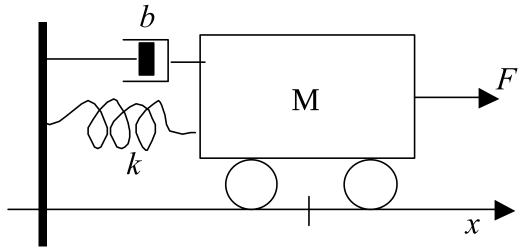
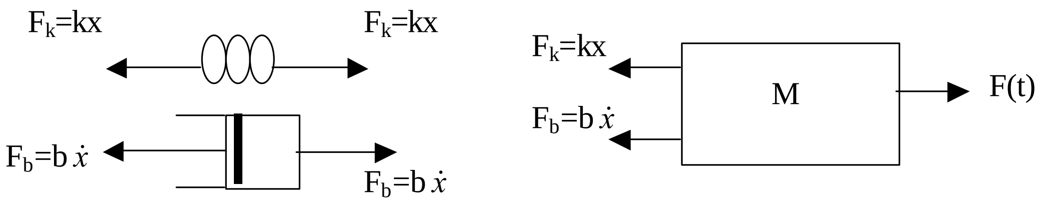


Fig.2

L'ambiente agisce sul sistema tramite la forza applicata F(*t*). L'uscita del sistema è la posizione *x*(t) della massa M. Per trovare una descrizione della dinamica del sistema, cioè il suo modello matematico, invochiamo la legge fondamentale della dinamica di Newton. In particolare la somma delle forze applicate sulla massa M deve essere uguale alla massa per l'accelerazione. Disgregando il sistema si evidenziano le forze applicate su M



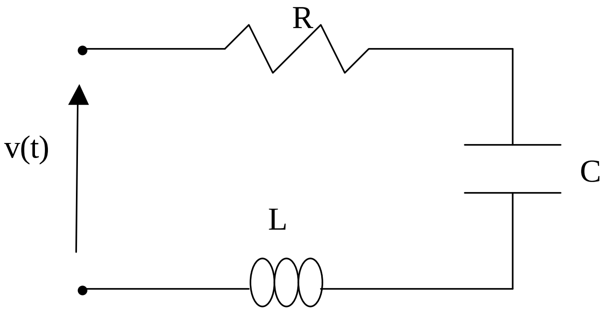
Proiettando l'equazione di equilibrio di Newton lungo la direzione *x*:

$$F + F_b + F_k = F - kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \qquad (1)$$

si ottiene un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti che rappresenta il modello matematico del sistema. Si parla di *modello* perché è una rappresentazione della realtà che contiene inevitabilmente delle approssimazioni. Ad esempio la legge di Hooke *F=kx* descrittiva della molla è un'approssimazione lineare di una relazione non lineare. Ad esempio un modello di validità più generale potrebbe essere del tipo $F=kx+k_2x^3$. In tal caso il modello rappresenta una molla che "s'indurisce" sempre di più con l'allungamento.

L'equazione differenziale (1) rappresenta un modello *dinamico* perchè la relazione tra le variabili d'ingresso e d'uscita dipende anche dalle derivate delle stesse. Quando tale relazione non dipende dalle derivate il legame è detto *statico*. Poiché è noto che la soluzione di un'equazione differenziale dipende dall'ingresso ma anche dalle condizioni iniziali si dice anche che il comportamento di un sistema dinamico dipende dal passato, oppure che un sistema dinamico ha memoria.

Esempio: Modello matematico di un sistema elettrico



Anche in tale caso come nel caso precedente si comincia dalle descrizioni matematiche ingresso-uscita delle parti che compongono il sistema.

Il resistore è descritto dalla relazione statica

$$v(t) = \mathrm{R}\; i(t)$$

Il condensatore è descritto dalla relazione dinamica

$$\mathrm{i(t)} = \mathrm{C}\,\frac{dv}{dt}$$

che può essere integrata nel seguente modo:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \frac{q(t)}{C}$$

L'induttore è descritto dalla relazione dinamica

$$\mathrm{v(t)} = \mathrm{L}\,\frac{di}{dt}$$

Considerando che gli elementi sono collegati in serie, cioè sono attraversati dalla stessa corrente , e considerando legge di Kirckhoff delle tensioni si ottiene la seguente equazione integro-differenziale

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$$

Poichè la corrente è il flusso di carica nell'unità di tempo, cioè risulta $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$, si può scrivere:

$$v(t) = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q(t)}{C}$$

che è un'equazione differenziale lineare del second'ordine. Si osservi che sia il sistema elettrico sia il sistema meccanico considerati sono descritti da una stessa equazione differenziale del tipo

$$f(t) = a_2\,\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0\,y(t)$$

In altre parole i sistemi sono analoghi. Pertanto si può dire che l'equazione differenziale contiene un significato che va oltre quello particolare. Si tratta cioè di un oggetto astratto le cui proprietà sono comuni a sistemi di diversa natura. Dal punto di vista pratico ciò significa che la "conoscenza" delle proprietà di un sistema "implica" la conoscenza delle proprietà dell'altro sistema e viceversa. Le relazioni di analogia tra le variabili e i parametri del sistema meccanico del II ordine e del sistema elettrico del II ordine sono:

$$\begin{aligned} &F \leftrightarrow v \\ &m \leftrightarrow L \\ &b \leftrightarrow R \\ &k \leftrightarrow 1/C \end{aligned}$$

Consideriamo un circuito RC serie, cioè il precedente con L=0, e calcoliamo la soluzione analitica. L'equazione differenziale che descrive il sistema è:

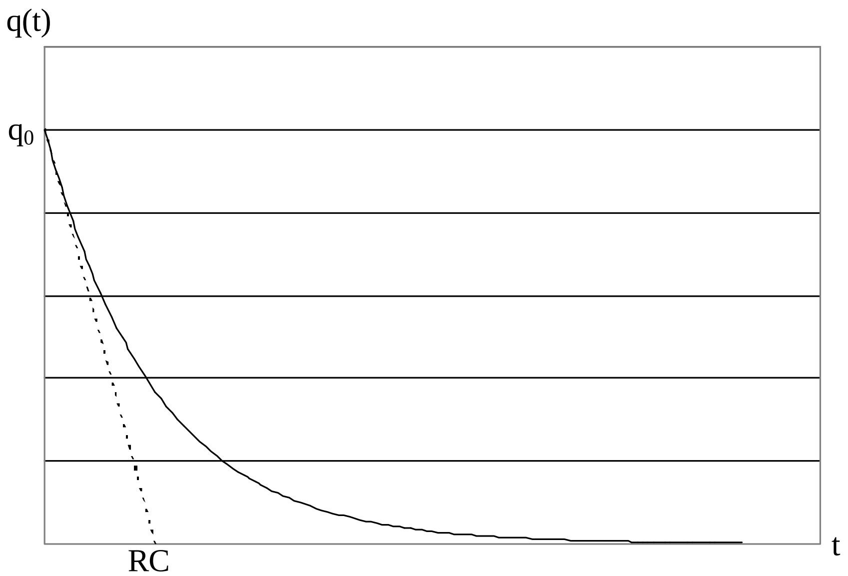
$$v(t) = Ri + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

L'omogenea $R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$ ha come soluzione $q(t) = q(0)\, e^{-t/RC}$ e rappresenta il processo di scarica di un condensatore. Come si può notare la soluzione è continua nel tempo (il tempo quindi appartiene all'insieme dei numeri reali). Ponendo τ=RC risulta $q=q_0\, e^{-t/\tau}$ e quindi τ è definita *costante di tempo* del processo. Infatti esprimendo il tempo t in multipli di τ si ottiene:

$$\text{per } t=3\tau\text{: } q(t)=q_0\, e^{-3} \approx 5\%\ q_0$$

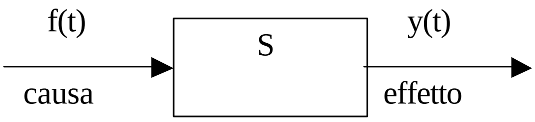
$$\text{per } t=4\tau\text{: } q(t)=q_0\, e^{-4} \approx 2\%\ q_0$$

Riportando su un diagramma q(t) in funzione del tempo t



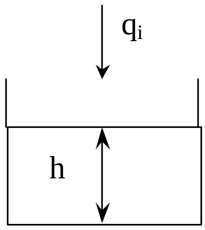
Un'equazione differenziale esprime una relazione tra le varabili d'ingresso e d'uscita e tra le derivate delle stesse variabili.

Considerata una relazione matematica tra variabili, si può decidere arbitrariamente quale variabile sia l'ingresso (la causa) e quale sia l'uscita (l'effetto). Tale operazione si chiama *orientazione.*



Dal punto di vista operativo un sistema è orientato in modo che la conseguente relazione di causa ed effetto abbia un significato fisico-ingegneristico. Ad es. nel caso del sistema meccanico può aver senso assumere la forza come variabile d'ingresso e la posizione come variabile d'uscita.

Esempio: Modello matematico di un sistema idraulico



Il serbatoio in figura è caratterizzato dalla portata d'ingresso q_i e dall'altezza del battente idrico h. Assumendo un serbatoio di sezione costante A, il volume di liquido risulta: V=Ah.

Per la legge di conservazione della massa si ha che

$$q_i = \frac{dV}{dt} = \frac{dAh}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

Anche qui emerge una legge che è analoga a quella che regola il flusso di corrente in un condensatore ($i = C\frac{dv}{dt}$). Per il sistema idraulico si riscontrano quindi le seguenti analogie:

$$q_i \leftrightarrow i$$
$$A \leftrightarrow C$$
$$h \leftrightarrow v$$

I sistemi tempocontinui lineari e tempo-invarianti sono descritti dall'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^{(i)}u}{dt^{(i)}}$$

Nei sistemi *tempodiscreti* il tempo appartiene all'insieme dei numeri naturali. Tali sistemi sono descritti da *equazioni alle differenze*. I sistemi tempodiscreti lineari tempo-invarianti sono descritti dall'equazione alle differenze:

$$y(k)=a_1\, y(k-1) + a_2\, y(k-2) +...+ a_n\, y(k-n) + b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) +...+ b_mu(k-m)$$

Si tratta evidentemente di un modello dinamico perché dipende dai valori passati di y (l'uscita) e dai valori passati di u (l'ingresso).

Esempi di modelli tempo-discreti sono quelli che descrivono i sistemi economici, perché le variabili sono rilevate a scadenza discreta. Per esempio i dati di un conto economico possono essere raccolti con cadenza trimestrali o annuale.

Esempio: modello matematico del PIL

L'economia di uno stato può essere descritta dalle seguenti variabili:

Y(k)=PIL (prodotto interno lordo)

C(k)=totale di merci e servizi consumati

G(k)=spesa pubblica

I(k)=investimenti

Fra tali grandezze possono essere stabilite delle relazioni. Una relazione di "collegamento" è data dall'equazione di bilancio

$$Y(k)=C(k)+G(k)+I(k)$$

Una relazione fornita dagli economisti che collega il PIL al comportamento dei consumatori è la seguente

$$C(k)=mY(k) \qquad (0<m<1)$$

dove m è la propensione al consumo (equazione statica)

Infine gli economisti hanno stabilito una relazione tra la crescita del PIL e gli investimenti:

$$Y(k+1)-Y(k)=rI(k)$$

che è un'equazione dinamica.

Esempio: Sistema ecologico

Il più classico esempio è il modello ecologico proposto da Vito Volterra, detto anche modello preda-predatore. Detto N_1 il numero di prede ed N_2 il numero dei predatori, l'evoluzione è descritta dalle seguenti equazioni differenziali non lineari:

$$\frac{dN_1}{dt} = a\, N_1(t) - b\, N_1(t)N_2(t)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -c\, N_2(t) + d\, N_1(t)N_2(t)$$

con a,b,c,d>0.

Si osserva che:

1) se il numero iniziale di predatori è nullo $N_2(0)=0$, la popolazione di prede aumenta all'infinito. Infatti la soluzione della prima equazione diventa $N_1=N_1(0)\, e^{at}$ ovvero si ha una crescita esponenziale;
2) se il numero di prede iniziali è nullo $N_1(0)=0$, i predatori sono destinati all'estinzione. Infatti la soluzione della seconda equazione diventa $N_2(t)=N_2(0)\, e^{-ct}$ ovvero si ha un decadimento esponenziale;
3) la contemporanea presenza di prede e predatori introduce i termini non lineari rappresentati dal prodotto dei numeri delle due specie. Il prodotto N_1N_2 rappresenta la possibilità dell'incontro tra preda e predatore. Tale incontro per la preda si risolve in una diminuzione di numero (segno negativo al coefficiente b) mentre per la popolazione dei predatori in un aumento di numero (segno positivo al coefficiente d).

Un sistema può essere descritto con una relazione tra ingresso e uscita tramite una black box (scatola nera) che rappresenta il comportamento ingresso/uscita del sistema stesso.

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\;S\;} \longrightarrow y(t)$$

Sistemi lineari, nonlineari, tempo-invarianti, tempo-varianti

In generale la relazione che lega ingresso ed uscita non è lineare, è cioè una funzione del tipo

$$f(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, ..., y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ...)=0$$

Si è inoltre visto che se il sistema è continuo, lineare e tempoinvariante (o più brevemente LTI) allora la forma generale di tale relazione è:

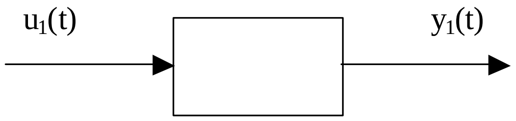
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^{(i)}u}{dt^{(i)}} \qquad (1)$$

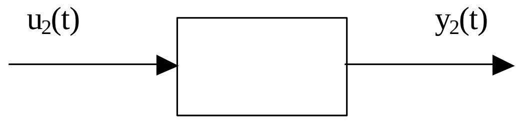
In realtà tutti i modelli naturali sono non lineari e tempovarianti; tuttavia è spesso possibile effettuare una linearizzazione nel caso di sistemi non lineari oppure, se i sistemi sono tempovarianti, è possibile approssimarli come sistemi tempoinvarianti se la grandezza tempovariante varia lentamente nell'intervallo di tempo d'interesse.

Proprietà dei sistemi LTI

Sovrapposizione degli effetti

Dati due ingressi $u_1(t)$ ed $u_2(t)$ che generano rispettivamente le uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$ allora l'ingresso $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$ produce l'uscita $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$.





Inffatti le coppie ingresso-uscita $(u_i(t),y_i(t))$ soddisfano le relazioni

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)} y_1}{dt^{(i)}} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^{(i)} u_1}{dt^{(i)}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)} y_2}{dt^{(i)}} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^{(i)} u_2}{dt^{(i)}}$$

Sommando membro a membro le due espressioni precedenti:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)} (y_1 + y_2)}{dt^{(i)}} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^{(i)} (u_1 + u_2)}{dt^{(i)}}$$

cioè anche la coppia $((u_1+u_2),(y_1+y_2))$ è soluzione della relazione ingresso-uscita. Allo stesso modo si può dimostrare che se gli ingressi u_1 e u_2 sono moltiplicati rispettivamente per due coefficienti α_1 e α_2 anche le rispettive uscite y_1 e y_2 saranno moltiplicate per gli stessi coefficienti.

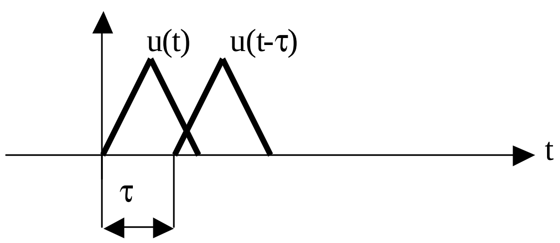
Si definisce *operatore funzionale* un operatore che trasforma la funzione in ingresso u(t) nella funzione d'uscita y(t) e si indica con $T(u(t))=y(t)$.

Si dice anche che i sistemi LTI sono operatori funzionali lineari. Infatti per essi si può scrivere

$$T(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)= \alpha_1 T(u_1)+ \alpha_2 T(u_2)$$

Tempoinvarianza

Ritardare una funzione u(t) di τ significa considerare la funzione $u(t-\tau)$. Prendendo come esempio un'onda triangolare risulta



Se un sistema tempoinvariante risponde all'ingresso u(t) con l'uscita y(t) allora esso risponderà all'ingresso ritardato $u(t-\tau)$ con l'uscita ritardata $y(t-\tau)$. La dimostrazione è immediata e analoga al caso precedente.

Se invece il sistema è LTV (lineare-tempovariante) tale proprietà non è più valida. Si consideri ad esempio il caso in cui i coefficienti a_i e b_i nella (1) non sono più costanti. In tal casso ritardando di τ l'ingresso u(t) l'uscita non sarà più y(t-τ) perché il valore dei coefficienti è cambiato.

Esempio

Considerato un circuito costituito da un generatore di tensione sinusoidale $e(t) = \sin t \cdot 1(t)$, dove 1(t) è la funzione gradino unitario $1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, chiuso su una resistenza di valore costante R, e considerata l'uscita i(t) risulta:

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\sin t \cdot 1(t)}{R}$$

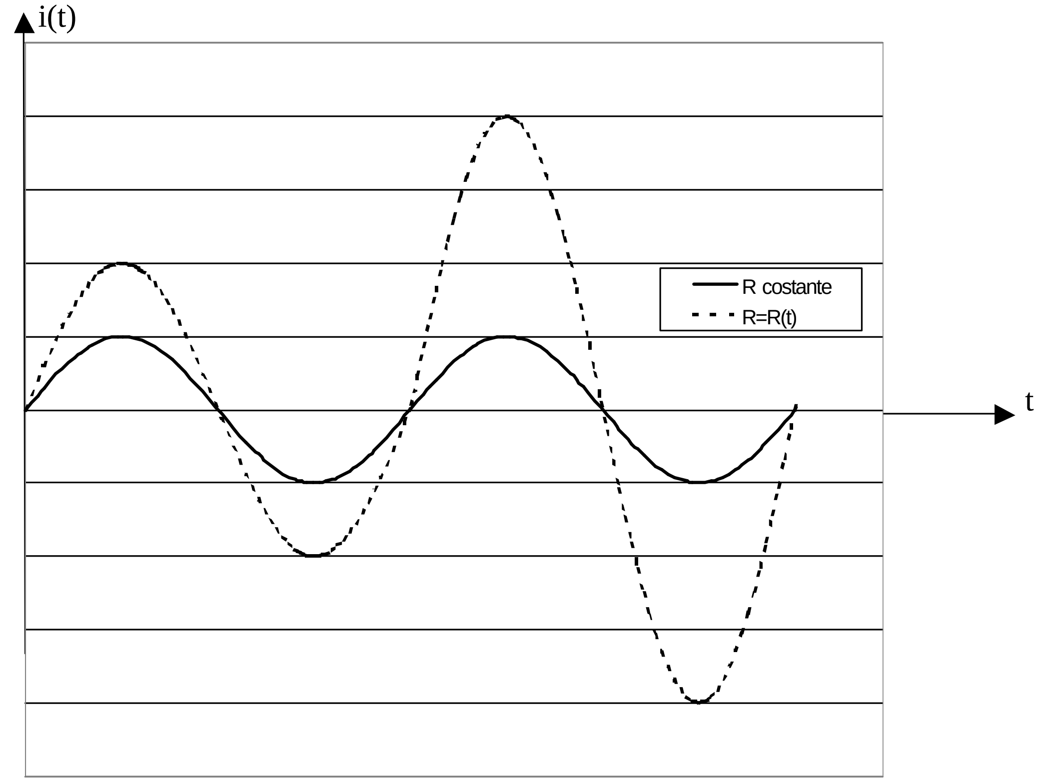
Considerando l'ingresso ritardato di τ, cioè la tensione e(t-τ)=sin(t-τ) 1(t-τ) la risposta sarà anch'essa ritardata e varrà:

$$\frac{\sin(t-\tau)1(t-\tau)}{R} = i(t-\tau)$$

Consideriamo ora un resistore tempovariante, variabile secondo la legge

$$R(t)=\begin{cases} R_1 \text{ per } t < t_1 \\ R_2 \text{ per } t \geq t_1 \end{cases} \qquad \text{con } R_2<R_1$$

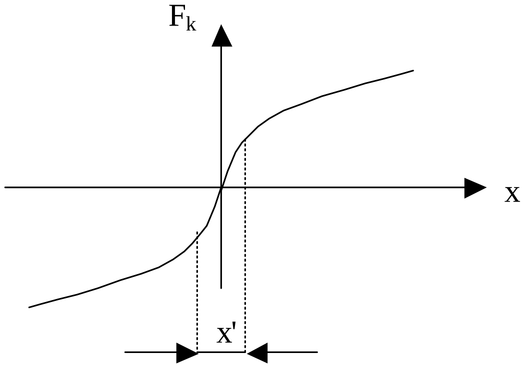
Applicando l'ingresso $e(t) = \sin t \cdot 1(t)$, l'uscita sarà $i(t) = \dfrac{\sin t \cdot 1(t)}{R_1}$ per $t<t_1$ e $i(t) = \dfrac{\sin t \cdot 1(t)}{R_2}$ per $t \geq t_2$ come raffigurato nella figura seguente.



Per i sistemi non lineari non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Essi sono descritti da equazioni differenziali non lineari il cui studio è solitamente notevolmente più complesso rispetto al caso lineare. Nel caso di sistemi non lineari la dizione "tempoinvariante" è sostituita dal termine "autonomo" mentre la dizione "tempovariante" è sostituita dal termine "non autonomo".

Un metodo semplice, anche se di validità limitata, per lo studio dei sistemi non lineari è il metodo della linearizzazione intorno al punto d'equilibrio. Con tale metodo si trova il sistema lineare che approssima quello non lineare per piccole variazioni delle variabili.

Un esempio in proposito può essere la relazione tra lo sforzo normale e l'allungamento di un materiale elastico. La forza elastica ha in generale un andamento del tipo in figura.



Tuttavia nell'intervallo dell'origine la relazione può essere approssimata tramite una legge lineare che è quindi una valida se la zona di funzionamento della molla è interna a questo intervallo.

Dei sistemi LTI esiste la soluzione analitica esplicita mentre per sistemi LTV o non lineari la soluzione si può trovare spesso solo per via numerica.

I sistemi non lineari non godono della proprietà di sovrapposizione degli effetti, un esempio è l'operazione di elevare al quadrato.

Considerati due ingressi u_1 e u_2 risulta infatti:

$$u_1^2 + u_2^2 \neq (u_1 + u_2)$$

Risoluzione numerica di equzioni differenziali e Simulazione

Spesso si ricorre all'utilizzo di un calcolatore per effettuare delle simulazioni. In tali casi il calcolatore risolve numericamente l'equazione differenziale che modella il sistema e disegna la soluzione. La metodologia usata è la seguente. Considerata l'equazione differenziale non lineare

$$\dot{y} = -y^{\frac{1}{2}} + 3y^2$$

si considera un piccolo "passo di integrazione" Δt e si esplicita la derivata nella forma

$$\frac{y(\Delta t) - y(0)}{\Delta t} = -y(0)^{1/2} + 3y(0)^2$$

da cui si ottiene

$y(\Delta t)=\left(-y(0)^{1/2}+3y(0)^{2}\right)\Delta t + y(0)$

In questo modo si è calcolato il valore della soluzione al passo Δt dopo l'istante 0; iterando il procedimento lungo l'intervallo d'interesse si ottiene la soluzione. L'esempio considerato è un sistema non lineare autonomo. Se al posto del coefficiente 3 ci fosse un coefficiente a(t) funzione del tempo sarebbe un esempio di sistema non autonomo.

SEGNALI CANONICI

I segnali canonici sono forme d'onda elementari (detti anche "segnali di prova") dalla cui combinazione lineare si possono generare segnali più complessi.

Impulso di Dirac

Si consideri un triangolo di area unitaria di base τ ed altezza 2/τ come in figura. Facendo tendere la base τ a zero mantenendo l'area costante, la forma d'onda tende ad assumere un'altezza infinita e una base infinitesima. Tale segnale rappresenta una funzione d'ingresso di durata breve e valore elevato. Si definisce impulso di Dirac e si indica con $\boldsymbol{d}(t)$ la funzione che si ottiene facendo tendere τ a zero.

$$\boldsymbol{d}(t) = \lim_{t \to 0} h(t, \boldsymbol{t})$$

Grafici di: (a) $h(t,\boldsymbol{t})$ **; (b)** $\boldsymbol{d}(t)$

Vale la *proprietà di selezione* dell'impulso per cui

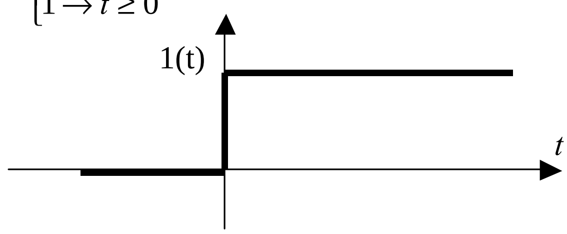
$$\int_a^b d(t-t)f(t) = \begin{cases} f(t) & se\ \boldsymbol{t} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ 0 & se\ \boldsymbol{t} \notin (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \end{cases}$$

In particolare

$$\int_{0^-}^{0^+} d(t) f(t) dt = f(0)$$

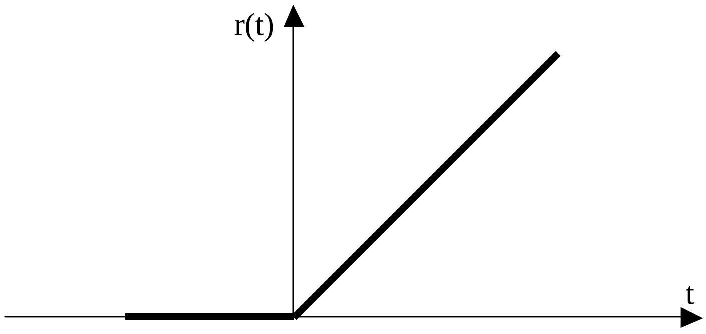
La funzione Gradino Unitario

Si indica con 1(t) e vale $1(t) = \begin{cases} 0 \to t < 0 \\ 1 \to t \geq 0 \end{cases}$. Si ottiene integrando l'impulso di Dirac: $1(t) = \int_0^t \boldsymbol{d}(z) dz$



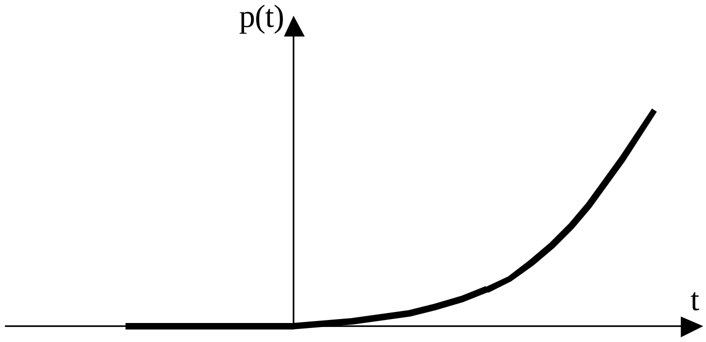
La funzione Rampa Unitaria

Si ottiene integrando il gradino e si indica con r(t)=$t \cdot 1(t) = \int_0^t 1(z)dz$



La funzione Rampa Parabolica

Si ottiene integrando la rampa unitaria e si indica con $p(t) = \frac{t^2}{2} 1(t) = \int_0^t r(z)dz$



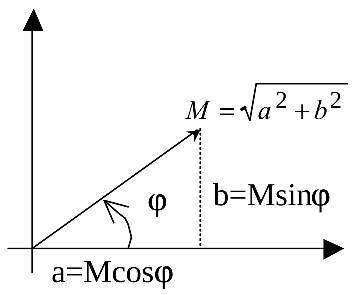
Altre funzioni canoniche sono i segnali seno e coseno.

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Abbiamo visto che molti sistemi appartengono alla classe dei sistemi lineari tempo-invrianati. Tali sistemi sono descritti matematicamente da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. La trasformata di Laplace è uno strumento matematico molto efficace per la soluzione e per lo studio delle proprietà delle soluzioni di una equazione differenziale lineare a coeffcicienti costanti. La trasformata di Laplace consente di trasformare un'equazione differenziale in un'equazione algebrica, la cui soluzione non è più una funzione del tempo ma è un semplice numero complesso.

Cenni riepilogativi sui numeri complessi

Un numero complesso s può essere rappresentato nella forma cartesiana $s=a+\mathrm{j}b$ oppure nella forma polare $s= Me^{\,j\varphi}$o polare. La figura mostra una rappresentazione di un numero complesso nel piano di Gauss e le relazioni tra il modulo e la fase e le componenti cartesiane. Si ricorda anche la uguaglianza di Eulero $e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi$.



La trasformata di Lapalce è una trasformazione funzionale che associa ad una funzione di variabile reale $f(t)$ una funzione di variabile complessa F(s). In particolare la trasformata di Lapalce è definita come:

$$L(f(t))=F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

L'operazione di trasformazione è *biunivoca*, cioè è sempre possibile passare da f(t) a F(s) e viceversa. L'operazione inversa è detta *antitrasformata*, ed è indicata con $L^{-1}(F(s))=f(t)$.

Come si può notare, la funzione f(t) è prima moltiplicata per un esponenziale e poi integrata. Intuitivamente questo può trovare spiegazione nel fatto che l'integrale di f(t) su un intervallo infinito potrebbe non convergere. Infatti, l'integrale tra 0 e del gradino unitario non converge, mentre l'integrale di $1(t)e^{-st}$ converge per valori di s tali che Re{s}>0. I valori di s per cui esiste la trasformata costituiscono il dominio di definizione della trasformata. Tale dominio è un semipiano delimitato da una retta verticale. L'intersezione della retta con l'asse reale è detta *ascissa di convergenza* ed indicata con σ_c. In conclusione, considerato il piano complesso, la retta parallela all'asse delle ordinate di equazione $s = \sigma_c$ divide il piano in due semipiani: il semipiano a destra dell'ascissa di convergenza è detto *piano di convergenza* poiché in esso esiste la trasformata di Laplace[1].

Proprietà della trasformata di Laplace

Teorema della derivata[1]

Considerata una funzione f(t), la trasformata della sua derivata risulta

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Applicando il teorema della derivata alla funzione derivata si ottiene

$$L\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

e generalizzando

$$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

Assumendo condizioni iniziali nulle, cioè $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$ risulta

$$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

In altre parole si usa dire che l'operazione di derivazione nel dominio del tempo corrisponde a moltiplicare per s nel dominio complesso.

Proprietà di linearità e sovrapposizione della trasformata di Laplace

Considerate due generiche funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ vale la seguente proprietà di linearità

$$L[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)]$$

La dimostrazione segue direttamente dalla definizione di trasformata di Laplace (l'operazione d'integrazione e' lineare).

[1] *Per gli approfondimenti si rimanda ai testi specifici sulla Trasformata di Laplace*

Teorema dell'integrale

Considerata una generica funzione f(t), la trasformata della funzione integrale $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ vale

$$L[\varphi(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

La dimostrazione segue direttamente dal teorema della derivata.

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Assumendo condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti risulta, in virtù della proprietà di linearità,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i L\left[\frac{d^i y_i}{dt^i}\right] = \sum_{i=0}^{m} b_i L\left[\frac{d^i u_i}{dt^i}\right]$$

e per il teorema della derivata

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i U(s)$$

Si definisce funzione di trasferimento (f.d.t.) e si indica solitamente con G(s) il rapporto

$$G(s) \underline{\Delta} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i} \quad [2] \qquad ()$$

La f.d.t. è il rapporto tra la trasformata dell'uscita Y e la trasformata dell'ingresso U. La f.d.t. è definita assumendo condizioni iniziali nulle cioè assumendo un sistema inizialmente in condizione di quiete. La f.d.t. G(s) è un rapporto tra polinomi, cioè è una funzione razionale.

Trasformate di segnali canonici

I segnali canonici possono essere L-trasformati. Calcoliamo la trasformata dell'impulso:

$$L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

Infatti l'integrale tra 0^+ e ∞ è nullo essendo nulla in tale intervallo la funzione integranda. In questo caso, come in tutti i casi di funzioni impulsive, occorre specificare l'estremo inferiore d'integrazione. Infatti in tale caso l'integrale fornisce un risultato diverso se calcolato a partire da 0^- o da 0^+. Si parla rispettivamente di trasformata L_- o L_+. Se la funzione trasformanda non è impulsiva allora $L_-=L_+$ cioè non occorre distinguere 0^- da 0^+.

[2] Il simbolo $\underline{\Delta}$ significa "per definizione uguale a"

Consideriamo la funzione gradino e proviamo prima a calcolarne la trasformata in base alla definizione e poi usando il teorema dell'integrale.

$$L[1(t)] = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-(s+jw)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad \text{con } s=\sigma+j\omega$$

L'integrale precedente converge per $\sigma>0$. Infatti:

$$|e^{-st}| = |e^{-(\sigma+j\omega)t}| = |e^{-\sigma t}|\,|e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}| = e^{-\sigma t} \to 0$$

poichè $|e^{-j\omega t}|=1$. Pertanto l'ascissa di convergenza del gradino è $\sigma_c=0$ e quindi il semipiano di convergenza è costituito dagli s per cui $Re\{s\}>\sigma_c=0$.

Osservando che il gradino è l'integrale dell'impulso, possiamo utilizzare il teorema dell'integrale:

$$L[1(t)] = L\left[\int_0^t d(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}$$

Analogamente si possono ottenere le trasformate della rampa unitaria $1/s^2$ e della rampa parabolica $1/s^3$. Esistono poi altri risultati che vale la pena ricordare perché utili per eseguire semplicemente operazioni di trasformazione e antitrasformazione.

1) $L[f(t)e^{kt}] = F(s-k)$

Infatti $\int_0^\infty f(t)e^{kt}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-k)t} = F(s-k)$

Un caso particolare del precedente è $L[e^{kt}\,1(t)] = \dfrac{1}{s-k}$

Ancora, se $k=j\omega$, allora $L[e^{j\omega t}] = \dfrac{1}{s-jw}$ con j unità immaginaria

Possiamo quindi trovare la trasformata del coseno come

$$L[\cos\omega t] = L\left[\frac{e^{jwt}+e^{-jwt}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-jw}+\frac{1}{s+jw}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+jw+s-jw}{s^2+w^2}\right] = \frac{s}{s^2+w^2}$$

e analogamente quella del seno

$$L[\sin\omega t] = L\left[\frac{e^{jw}-e^{-jw}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw}-\frac{1}{s+jw}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{s+jw-s+jw}{s^2+w^2}\right] = \frac{w}{s^2+w^2}$$

2) $L[f(t-\tau)] = F(s)\,e^{-\tau s}$

Infatti ponendo $(t-\tau)=z$ e quindi $dt=dz$ l'integrale $\int_0^\infty f(t-t)e^{-st}dt$ diventa

$$\int_0^\infty f(z)e^{-s(z+t)}dz = e^{-st}F(s)$$

Un esempio è $L[1(t-\tau)] = \dfrac{1}{s}e^{-ts}$

3) $L[t^n e^{pt}] = \dfrac{n!}{(s-p)^{n+1}}$ o equivalentemente $L\left[\dfrac{t^n}{n!}e^{-pt}\right] = \dfrac{1}{(s+p)^{n+1}}$

Si osservi che i termini e^{pt} , $t^n e^{pt}$ tendono a zero per t che tende all'infinito se Re{p}<0.

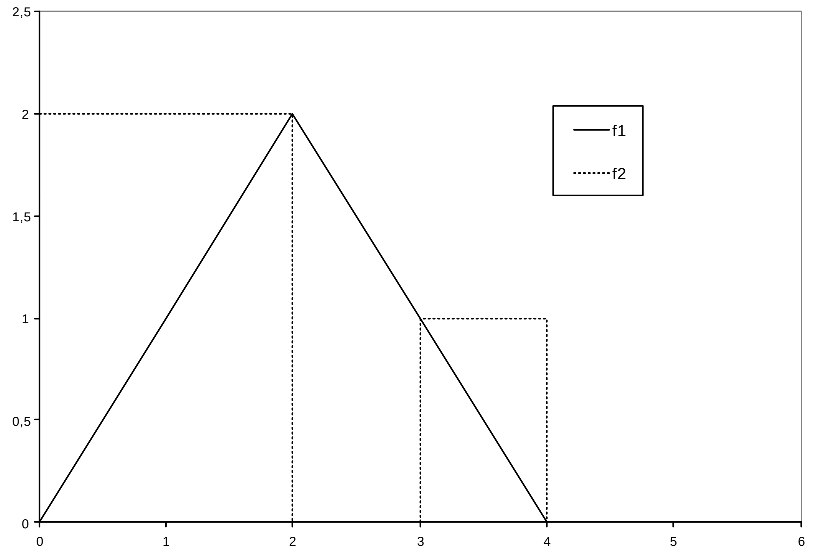
Nel caso in cui p è a parte reale (strettamente) negativa si dice *polo (asintoticamente) stabile*.

Nel caso in cui p è a parte reale positiva si dice *polo instabile.*

Un segnale complesso può essere espresso come combinazione lineare di segnali canonici. Conseguentemente la risposta ad un segnale complesso può essere ottenuta come somma di risposte canoniche.

Esempio

Esprimere le funzioni f_1 e f_2 in figura come combinazioni lineari di segnali canonici.



$f_1(t) = 2\,1(t) - 2\,1(t-2) + 1(t-3) - 1(t-4)$;

$F_1(s) = 2/s - 2/s\, e^{-2s} + 1/s\, e^{-3s} - 1/s\, e^{-4s}$

$f_2(t) = t\,1(t) - 2(t-2)\,1(t-2) + (t-4)\,1(t-4)$;

$F_2(s) = 1/s^2 - 2/s^2\, e^{-2s} + 1/s^2\, e^{-4s}$

Prodotto di convoluzione

Considerate due generiche funzioni f(t) e g(t), si definisce il prodotto di convoluzione come segue:

$$g * f = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

con g(t)=f(t)=0 per t<0 affinché la trasformazione di Laplace sia biunivoca.

Per τ>t risulta g(t)=0 e quindi possiamo scrivere che

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_t^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

giacché è nullo il secondo integrale a primo membro.

Si dimostra che la trasformata del prodotto di convoluzione è uguale al prodotto delle trasformate.

L[g*f] = F(s)G(s) = L[f(t)]L[g(t)]

Funzione di trasferimento come trasformata della risposta impulsiva

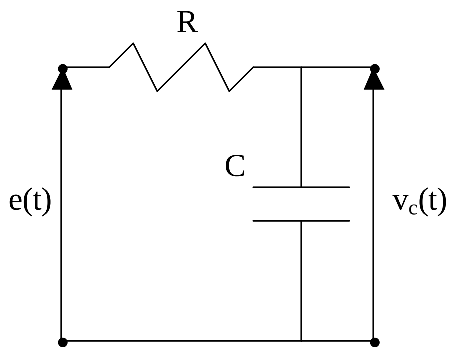
Si consideri un sistema LTI generico descritto dalla funzione di trasferimento G(s). Si cerchi la risposta y(t) al segnale d'ingresso u(t)= δ(t).

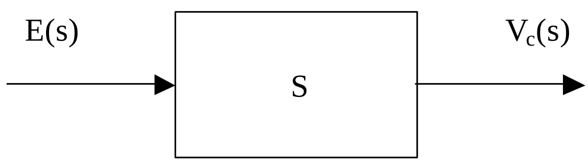
$$L[u(t)] = L[\delta(t)] = 1 = U(s); \quad L[y(t)] = Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento G(s) è la L-trasformata della risposta del sistema all'impulso di Dirac. La risposta impulsiva è quindi l'antitrasformata di G(s), cioè $g(t)=L^{-1}[G(s)]$.

Esempio

Consideriamo ora un circuito RC serie in cui l'ingresso u(t)=e(t) e l'uscita y(t)=v_c(t).





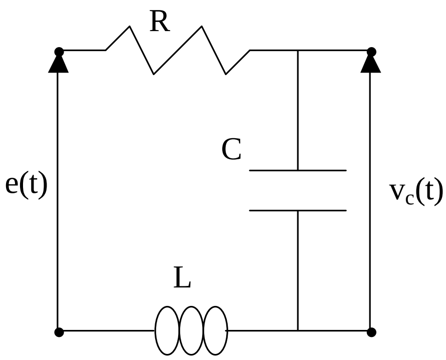
Si noti che la scelta della variabile d'ingresso e della variabile d'uscita è il risultato di un'operazione di *orientazione di un sistema*, in quanto implica la scelta di una variabile "causa" ed una variabile "effetto". Lo schema a blocchi raffigurato evidenzia l'ingresso/causa e l'uscita/effetto. Considerando gli elementi circuitali come sistemi singoli, essi sono descritti dalla funzione di trasferimento

resistore : $v(t)=R\,i(t) \rightarrow V(s)= R\,I(s) \rightarrow G(s)=\dfrac{I(s)}{V(s)}=\dfrac{1}{R}$ relazione statica

condensatore : $i(t)=C\,\dfrac{dv_c}{dt} \rightarrow I(s)=sC\,V(s) \rightarrow G(s)= sC$ relazione dinamica

Si definisce *improprio* il sistema in cui il grado del denominatore della G(s) è minore del grado del numeratore; tali sistemi sono fisicamente irrealizzabili. Infatti un condensatore reale avrà una sua resistenza. Si definisce *proprio* il sistema per il quale il grado del denominatore della G(s) è maggiore o uguale al grado del numeratore (*strettamente proprio* se il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore). I sistemi reali sono strettamente propri o tutt'al più propri.

Se si modellano gli effetti induttivi inserendo un induttore, il modello diventa una rappresentazione più fedele della realtà. In particolare si ottiene il seguente modello



$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\frac{de}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

da cui si ricava la fdt tra tensione applicata e corrente

$$G(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{sC}{1 + sRC + s^2 LC}$$

e la fdt tra tensione applicata e tensione sul condensatore $G_2(s) = \frac{V_C(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + sRC + s^2 LC}$