Corso di Controllo dei Robot
Cinematica differenziale

Paolo Lino

Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Cinematica differenziale

- La cinematica differenziale caratterizza i legami tra le velocità dei giunti e le corrispondenti velocità lineare e angolare dell'organo terminale.
- Tali legami sono espressi da una matrice di trasformazione, dipendente dalla configurazione del manipolatore, denominata *Jacobiano geometrico*.
- Per altra via, se la postura dell'organo terminale è espressa facendo riferimento ad una rappresentazione in forma minima dello spazio operativo, è possibile calcolare lo Jacobiano direttamente, mediante operazione di differenziazione della funzione cinematica diretta rispetto alla variabile di giunto; lo Jacobiano che ne viene fuori è denominato *Jacobiano analitico* ed è in generale diverso da quello geometrico.

Jacobiano geometrico

Equazione cinematica diretta per manipolatore a *n* gradi di libertà:

$$T(q) = \begin{bmatrix} R(q) & p(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{p} = J_p(q)\dot{q} \qquad \textit{velocità lineare dell'organo terminale}$$

$$\omega = J_o(q)\dot{q} \qquad \textit{velocità angolare dell'organo terminale}$$

J_p rappresenta la matrice (*3xn*) relativa al contributo delle velocità dei giunti alla velocità lineare dell'organo terminale, mentre J_o è la matrice (*3xn*) relativa al contributo delle velocità dei giunti alla velocità angolare ω dell'organo terminale

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

equazione cinematica differenziale del manipolatore

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix}$$

Jacobiano geometrico del manipolatore

(Alcune) Proprietà di una matrice anti-simmetrica

- La matrice S contiene solo 3 elementi indipendenti

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Per il generico vettore $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ si definisce la matrice:

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Per ogni vettore $\omega, p \in \mathbb{R}^3$ vale la relazione:

$$S(\omega)p = \omega \wedge p$$

- Per ogni vettore $\omega \in \mathbb{R}^3$, R matrice ortogonale, vale la relazione:

$$RS(\omega)R^T = S(R\omega)$$

$$Dim. \quad RS(\omega)R^T b = R(\omega \wedge R^T b) = (R\omega) \wedge (RR^T b) = (R\omega) \wedge b = RS(\omega)b$$

Derivata di una matrice di rotazione

Si supponga che la matrice di rotazione vari nel tempo, in altre parole $R = R(t)$. Dalla proprietà di ortogonalità di R si ha la relazione $R(t)R^T(t) = I$ che, derivata rispetto al tempo, fornisce l'identità

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = 0$$

Poniamo :

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$$

Anti-simmetrica :

$$S(t) + S^T(t) = 0$$

$$s_{ij} = -s_{ji}$$

$$s_{ii} = 0$$

Moltiplichiamo a destra ambo i membri dell'espressione di $S(t)$ per $R(t)$:

$$S(t)R(t) = \dot{R}(t)R^T(t)R(t) \qquad \dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

Interpretazione fisica

Si consideri un vettore p' costante ed il vettore $p(t) = R(t)p'$.

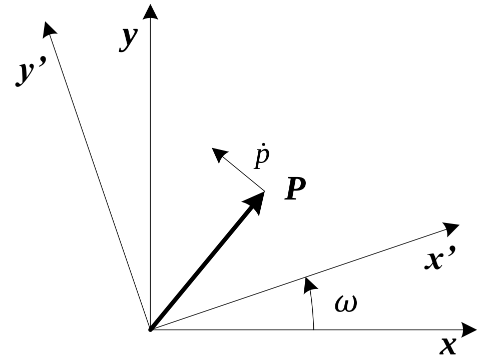
La derivata temporale di $p(t)$ risulta:

$$\dot{p}(t) = \dot{R}(t)\,p' \qquad \dot{p}(t) = S(t)R(t)\,p'$$

Dalla meccanica classica risulta che la velocità di un vettore applicato si esprime nella forma:

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \wedge R(t)\,p'$$

con $\omega(t)$ *velocità angolare* della terna $R(t)$ rispetto alla terna di riferimento.



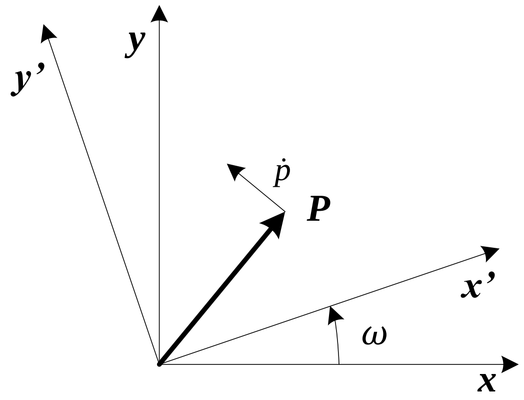
Uguagliando le due espressioni si osserva che la matrice $S(t)$ esprime il prodotto vettoriale tra il vettore velocità angolare $\omega(t)$ ed il vettore $R(t)p'$.

Velocità angolare

$$\omega(t) = \left[\omega_x, \omega_y, \omega_z\right]^T \qquad S(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t_0) & \omega_y(t_0) \\ \omega_z(t_0) & 0 & -\omega_x(t_0) \\ -\omega_y(t_0) & \omega_x(t_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(t) = S(\omega(t)).$$

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \wedge R(t)p' = S(t)R(t)p'$$



p solidale a Ox'y'

$Ox'y'$ruota con velocità angolare ω

Esempio

Consideriamo la matrice di rotazione elementare intorno all'asse z:

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che α vari nel tempo. Calcolando la derivata rispetto al tempo di $R_z(\alpha(t))$, la matrice $S(t)$ è data da:

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t) = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s_\alpha & -\dot{\alpha}c_\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c_\alpha & -\dot{\alpha}s_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

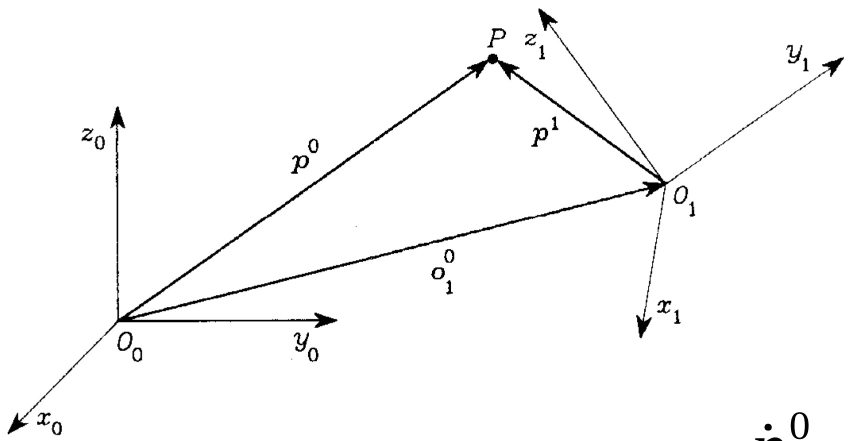
quindi il vettore velocità angolare della terna ruotata rispetto alla terna base vale:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

$$S(t)R(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s_\alpha & -\dot{\alpha}c_\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c_\alpha & -\dot{\alpha}s_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

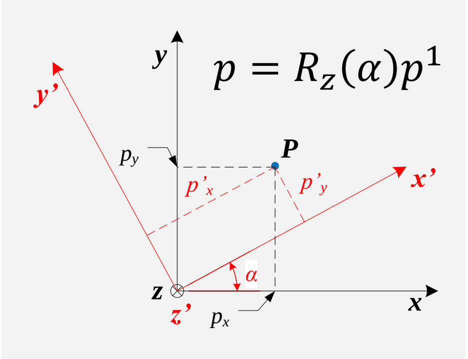
Composizione di velocità



$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1$$

$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \dot{R}_1^0 p^1$$

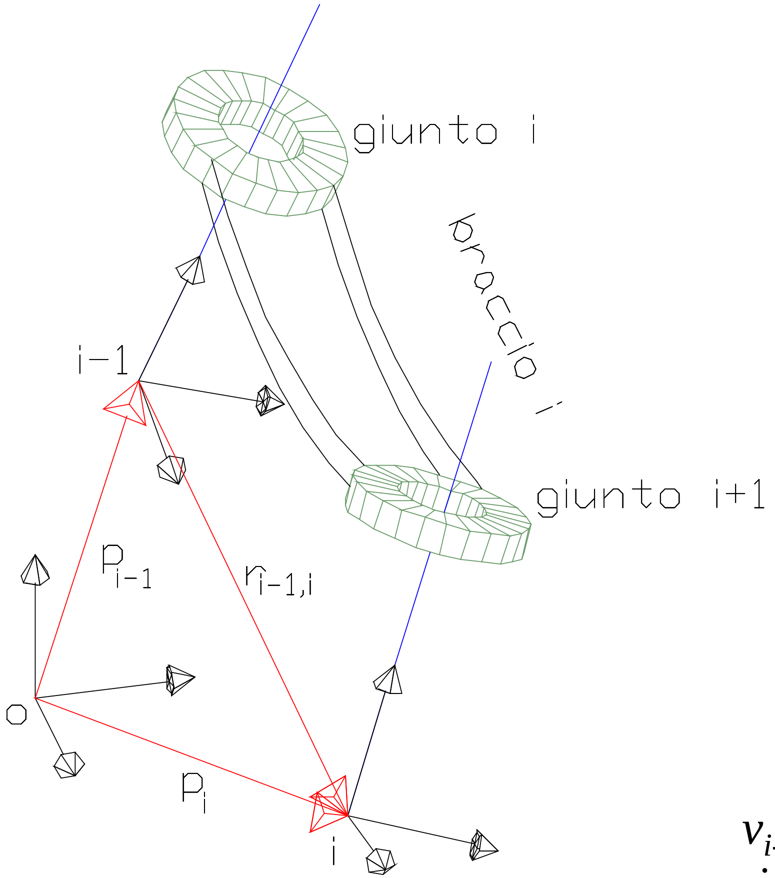
$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + S(\omega_1^0) R_1^0 p^1$$



$$\xrightarrow{r_1^0 = R_1^0 p^1} \dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \omega_1^0 \wedge r_1^0$$

se p^1 è costante nel tempo (fisso rispetto alla terna 1): $\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + \omega_1^0 \wedge r_1^0$

Velocità di un braccio



La terna i è solidale al braccio (conv. DH)

Velocità Traslazionale

$$p_i = p_{i-1} + R_{i-1} r_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \omega_1^0 \wedge r_1^0$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + R_{i-1} \dot{r}_{i-1,i}^{i-1} + S(\omega_{i-1}) R_{i-1} r_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \wedge r_{i-1,i}$$

$v_{i-1,i}$ indica la velocità dell'origine della terna *i* rispetto all'origine della terna *i – 1*, espressa nella terna base

Velocità angolare

$$R_i = R_{i-1} R_i^{i-1}$$

Derivando:

$$\dot{R}_i = \dot{R}_{i-1} R_i^{i-1} + R_{i-1} \dot{R}_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i) R_i = S(\omega_{i-1}) R_{i-1} R_i^{i-1} + R_{i-1} S(\omega_{i-1,i}^{i-1}) R_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i) R_i = S(\omega_{i-1}) R_i + R_{i-1} S(\omega_{i-1,i}^{i-1}) R_i^{i-1}$$

Velocità angolare

Per l'ortogonalità delle matrici di rotazione si può ancora scrivere

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})IR_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})R_{i-1}^T R_{i-1}R_i^{i-1}$$

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})R_{i-1}^T R_i$$

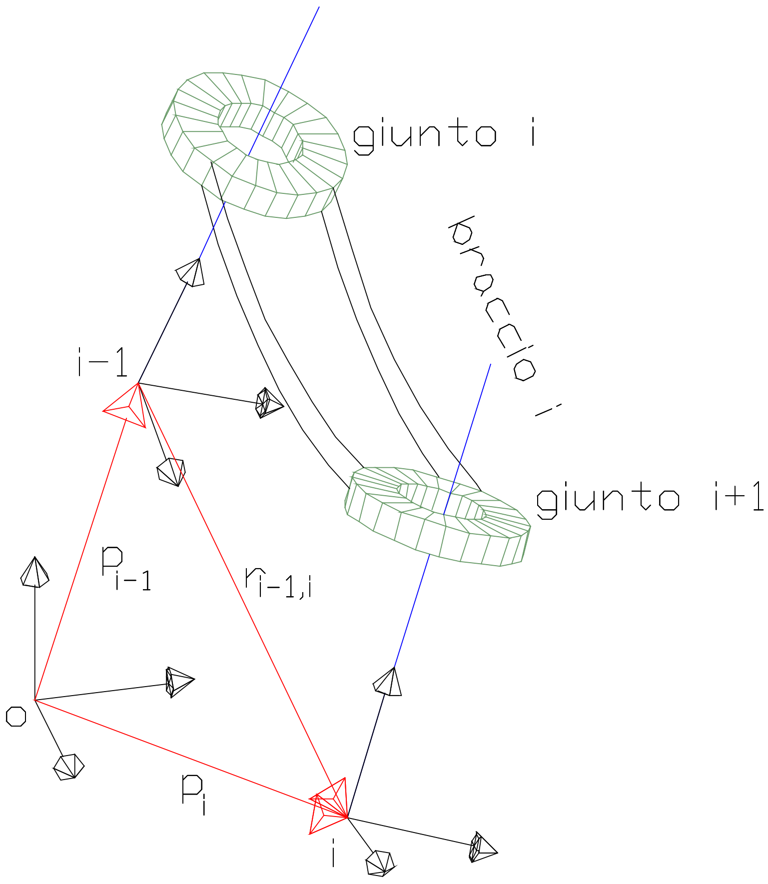
Osserviamo che per le matrici di rotazione vale la relazione, $RS(\omega)R^T = S(R\omega)$, quindi:

$$S(\omega_i)R_i = S(\omega_{i-1})R_i + S(R_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1})R_i$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + R_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1} \qquad \omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

Composizione di velocità



Le relazioni trovate possono essere particolareggiate per giunti prismatici o rotoidali

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \wedge r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \wedge r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i} \end{cases}$$

Giunto prismatico

$$v_{i-1,i} = \dot{d}_i z_{i-1}$$

$$\omega_{i-1,i} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \dot{d} z_{i-1} + \omega_{i-1} \wedge r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} \end{cases}$$

Giunto rotoidale

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_{i-1,i} \wedge r_{i-1,i} + \omega_{i-1} \wedge r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \left(\omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}\right) \wedge r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_i \wedge r_{i-1,i} \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1} \end{cases}$$

Calcolo dello Jacobiano

$$\begin{cases} \dot{p} = J_p(q)\dot{q} \\ \omega = J_o(q)\dot{q} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \qquad J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{p_1} & \cdots & j_{p_n} \\ j_{o_1} & \cdots & j_{o_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{p_1} & \cdots & j_{p_n} \\ j_{o_1} & \cdots & j_{o_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

velocità lineare $p = p\big(q(t)\big) \longrightarrow \dot{p} = \dfrac{\partial p}{\partial q}\dot{q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial p}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} j_{p_i}\dot{q}_i$

(ciascun termine rappresenta il contributo del singolo giunto alla velocità dell’end effector)

velocità angolare $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{n} j_{o_i}\dot{q}_i$

Calcolo dello Jacobiano

Giunto prismatico

$$\left\| \begin{aligned} \omega_{i-1,i} &= j_{o_i}\dot{q}_i = 0 \\ v_{i-1,i} &= j_{p_i}\dot{q}_i = \dot{d}_i z_{i-1} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\| \begin{aligned} \dot{q}_i &= \dot{d}_i \\ j_{o_i} &= 0 \\ j_{p_i} &= z_{i-1} \end{aligned} \right.$$

Giunto rotoidale

$$\left\| \begin{aligned} \omega_{i-1,i} &= j_{o_i}\dot{q}_i = \dot{\theta}_i z_{i-1} \\ v_{i-1,i} &= \omega_{i-1,i} \wedge r_{i-1,i} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\| \begin{aligned} j_{o_i}\dot{q}_i &= \dot{\theta}_i z_{i-1} \\ v_{i-1,e} &= j_{p_i}\dot{q}_i = \dot{\theta}_i z_{i-1} \wedge (p - p_{i-1}) \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\| \begin{aligned} \dot{q}_i &= \dot{\theta}_i \\ j_{o_i} &= z_{i-1} \\ j_{p_i} &= z_{i-1} \wedge (p - p_{i-1}) \end{aligned} \right.$$

velocità lineare dell'organo terminale
<u>quando gli altri giunti sono fermi</u>

Calcolo dello jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} Jp_i \\ Jo_i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{giunto prismatico} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \wedge (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

z_{i-1} è dato dalla terza colonna della matrice di rotazione R_{i-1}^{0}, e quindi

$$z_{i-1} = R_1^0(q_1) \cdots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0$$

$z_0 = [0, 0, 1]^T$ Vettore di selezione della terza colonna

p è dato dai primi tre elementi della quarta colonna della matrice di trasformazione T_n^0

$$\tilde{p} = A_1^0(q_1)\cdots A_n^{n-1}(q_n)\tilde{p}_0 \qquad \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

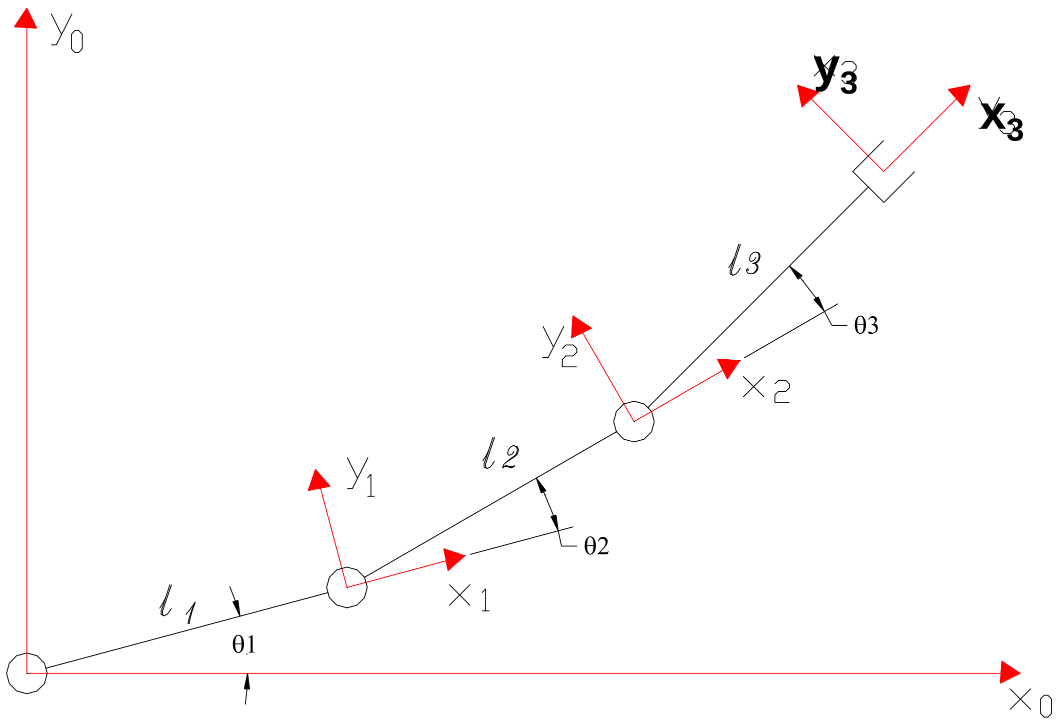
p_{i-1} è dato dai primi tre elementi della quarta colonna della matrice di trasformazione T_{n-1}^0

$$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1)\cdots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\tilde{p}_0$$

Si osserva che lo Jacobiano dipende dalla terna rispetto alla quale viene espressa la velocità dell'organo terminale.

$$\begin{bmatrix} \dot{p}^u \\ \dot{\omega}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & o \\ o & R^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \Rightarrow J^u = \begin{bmatrix} R^u & o \\ o & R^u \end{bmatrix} J$$

Esempio: Manipolatore a tre bracci



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_{i-1} \wedge (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

con i = 1, 2, 3

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p - p_0) & z_1 \wedge (p - p_1) & z_2 \wedge (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1^0(\theta_1) = A_2^1(\theta_2) = A_3^2(\theta_3) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & \ell_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & \ell_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p} = T_3^0(q)\tilde{p}_0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 \tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{123} + \ell_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1) \cdots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\tilde{p}_0$$

$$z_{i-1} = R_1^0(q_1) \cdots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0$$

$$\tilde{p}_0 = A_0^0(\theta_1)\tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_1 = A_1^0(\theta_1)\tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & \ell_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 \\ \ell_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_2 = A_1^0(\theta_1)A_2^1(\theta_2)\tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prodotto vettoriale tra due vettori $P \equiv (P_x, P_y, P_z)$ e $Q \equiv (Q_x, Q_y, Q_z)$

$$P \wedge Q = \begin{bmatrix} Q_y P_z - Q_z P_y \\ Q_z P_x - Q_x P_z \\ Q_x P_y - Q_y P_x \end{bmatrix}$$

$$z_0 \wedge (p - p_0) = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 \wedge (p - p_1) = \begin{bmatrix} -\ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} \\ \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 \wedge (p - p_2) = \begin{bmatrix} -\ell_3 s_{123} \\ \ell_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} & -\ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} & -\ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} & \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} & \ell_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Nel piano x-y :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} & -\ell_2 s_{12} - \ell_3 s_{123} & -\ell_3 s_{123} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} & \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} & \ell_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jacobiano analitico

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial q}\dot{q} = J_P(q)\dot{q}$$

p origine della terna utensile rispetto alla terna base

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} = J_\phi(q)\dot{q}$$

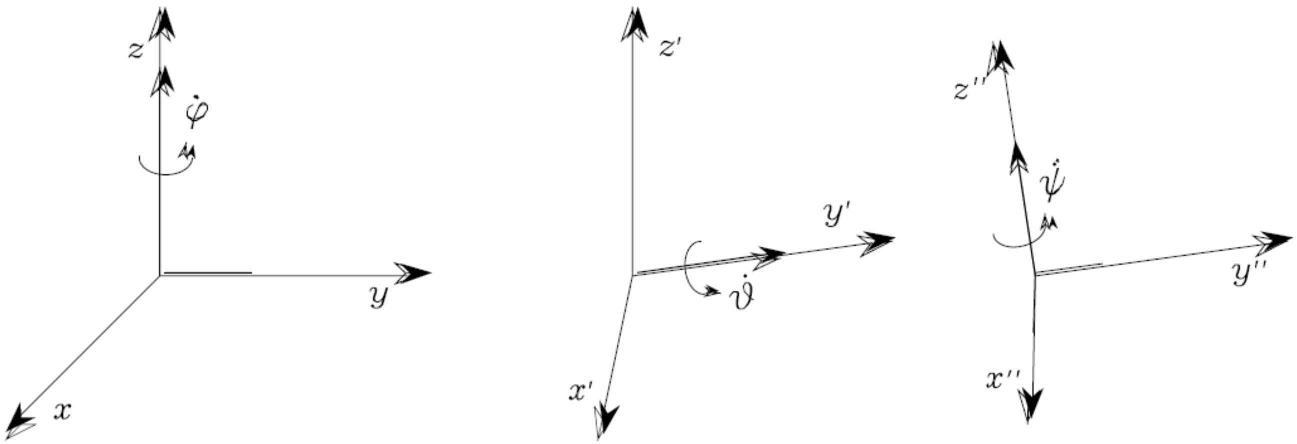
ϕ : rappresentazione minima dell’orientamento

La derivata rispetto al tempo di ϕ non coincide, in generale, con il vettore velocità angolare definito in precedenza

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix}\dot{q} = J_A(q)\dot{q}$$

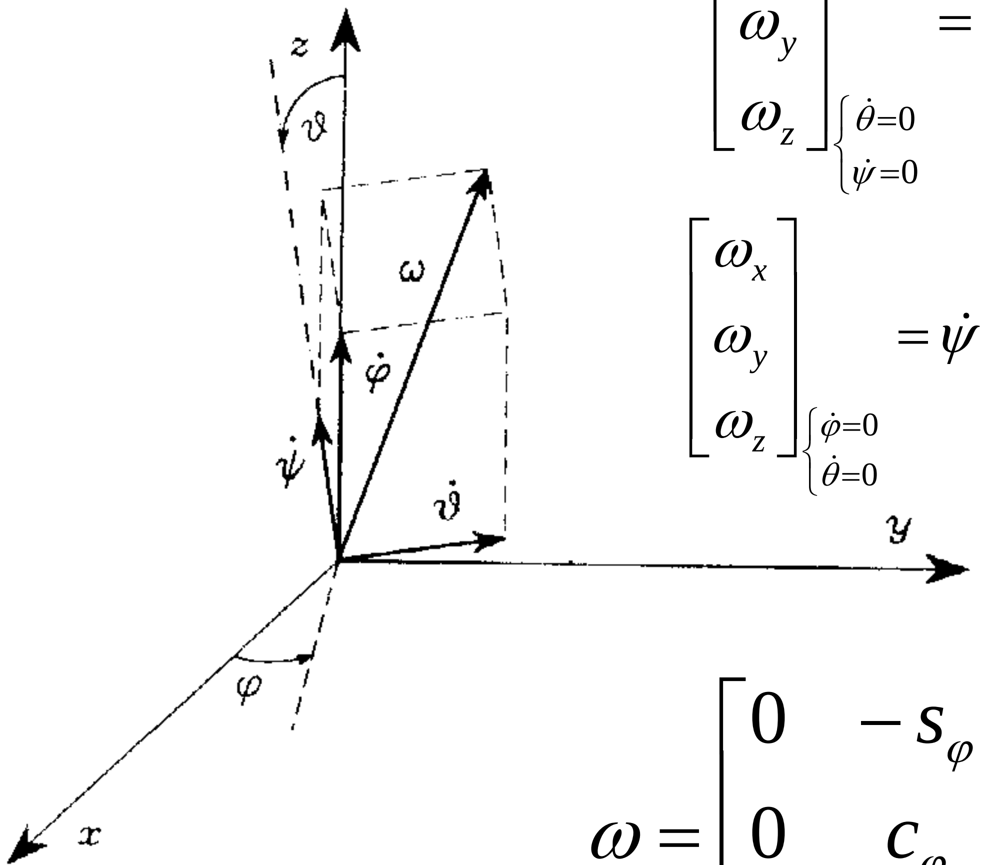
$$J_A(q) = \frac{\partial k(q)}{\partial q}$$

Legame tra Jacobiano analitico e jacobiano geometrico



Velocità di rotazione in terna corrente di angoli di Eulero ZYZ

$$R_{EUL} = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}_{\begin{cases}\dot\theta=0\\ \dot\psi=0\end{cases}} = \dot\varphi\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}_{\begin{cases}\dot\varphi=0\\ \dot\psi=0\end{cases}} = \dot\theta\begin{bmatrix}-s_\varphi\\ c_\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}_{\begin{cases}\dot\varphi=0\\ \dot\theta=0\end{cases}} = \dot\psi\begin{bmatrix}c_\varphi s_\theta\\ s_\varphi s_\theta\\ c_\theta\end{bmatrix}$$

$$\omega = \begin{bmatrix}0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\theta\\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\theta\\ 1 & 0 & c_\theta\end{bmatrix}\dot\phi = T(\phi)\dot\phi$$

Singolarità di rappresentazione di ϕ

Il determinante della matrice T è pari a $-s_\theta$, il che significa che la relazione non è invertibile per $\theta = 0, \pi$.

Ciò significa che, sebbene ogni velocità di rotazione della terna possa essere espressa mediante un opportuno vettore di velocità angolare ω, esistono velocità angolari che non possono essere espresse mediante $\dot{\phi}$, quando l'orientamento della terna utensile impone $s_\theta = 0$.

In questa situazione, infatti, le velocità angolari che possono essere descritte da $\dot{\phi}$ sono vincolate ad avere componenti nelle direzioni ortogonali all'asse z tra di loro dipendenti $\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\theta}^2\right)$

Gli orientamenti che annullano il determinante della matrice di trasformazione sono dette *singolarità di rappresentazione di ϕ*.

Significati fisici di ω e di $\dot{\phi}$

- Da un punto di vista fisico il significato di ω è più intuitivo di quello di $\dot{\phi}$
- Tuttavia l'integrale di $\dot{\phi}$ corrisponde a ϕ ed esprime quindi le variazioni impresse sugli angoli di Eulero per passare da un orientamento ad un altro, mentre l'integrale di ω non ammette alcuna interpretazione fisica

Legame tra Jacobiano analitico e jacobiano geometrico

$$v = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix} \dot{x} = T_A(\phi)\dot{x}$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q)\dot{q}$$

$$J = T_A(\phi) J_A$$

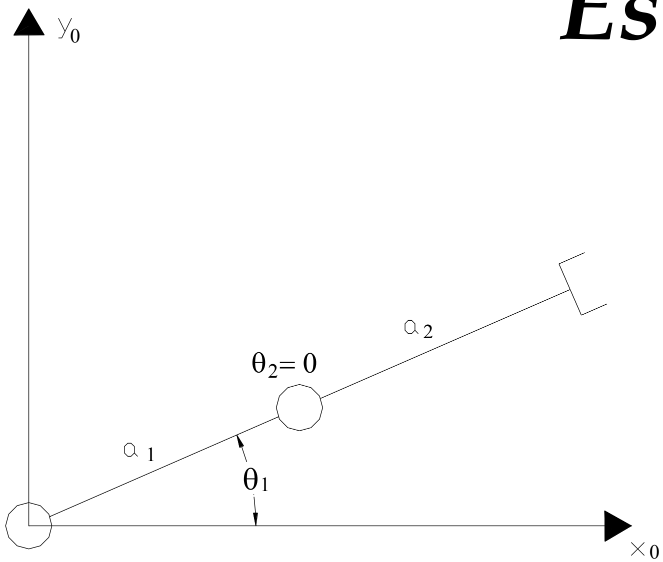
Singolarità Cinematiche

- Tutte quelle configurazioni, per le quali J diminuisce il suo rango sono chiamate ***singolarità cinematiche***.
- La caratteristica delle singolarità è di notevole interesse per i seguenti motivi:
  a) Le singolarità rappresentano configurazioni in corrispondenza delle quali si ha una perdita di mobilità della struttura, ovvero non è possibile imporre all'organo terminale leggi di moto arbitrarie.
  b) Quando la struttura è in una configurazione singolare, possono esistere infinite soluzioni al problema cinematico inverso
  c) Nell'intorno di una singolarità, velocità ridotte nello spazio operativo possono indurre velocità molto alte nello spazio dei giunti.

Singolarità cinematiche

- Singolarità ai *confini dello spazio di lavoro raggiungibile* che si presentano quando il manipolatore è tutto steso o tutto ripiegato su se stesso. Queste singolarità possono essere evitate.
- Singolarità *all'interno dello spazio di lavoro raggiungibile* che sono generalmente causate dall'allineamento di due o più assi di moto, in altre parole dall'assunzione di configurazioni particolari da parte dell'organo terminale. Queste costituiscono un problema serio in quanto, essendo all'interno dello spazio di lavoro, possono essere interessate da traiettorie pianificate nello spazio operativo.

Esempio



$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$det(J) = a_1 a_2 s_2$$

Il determinante si annulla per $\theta_2 = 0, \pi$, mentre θ_1 è ininfluente ai fini delle determinazioni di posizioni singolari.

Le due configurazioni trovate corrispondono ai casi in cui l'organo terminale del manipolatore è situato al confine esterno ($\theta_2 = 0$, rappresentato in figura) o interno ($\theta_2 = \pi$).

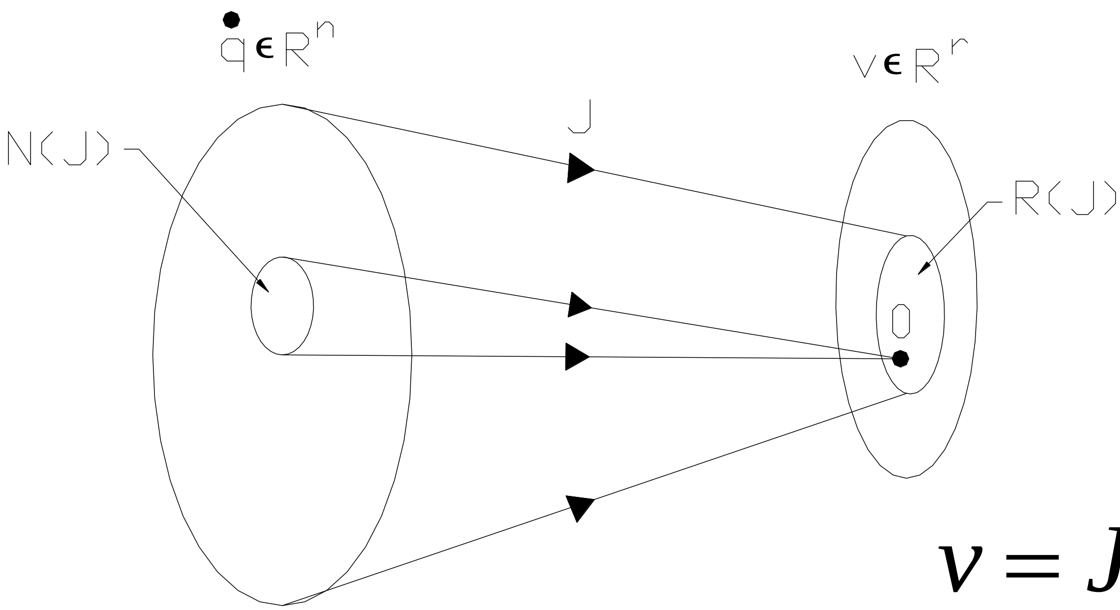
$$J = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2) s_1 & -a_2 s_1 \\ (a_1 + a_2) c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix}$$

Analisi della ridondanza

$$v = J(q)\dot{q}$$

- v è da intendersi come il vettore (*rx1*) delle velocità dell'organo terminale necessarie per specificare il compito;
- J come la corrispondente matrice Jacobiana (*rxn*) estratta dallo Jacobiano geometrico;
- $\dot{q}$ è il vettore (*nx1*) delle velocità dei giunti.

Se $r < n$, il manipolatore risulta ridondante da un punto di vista cinematico ed esistono (n-r) *gradi di mobilità ridondanti*.



$$v = J(q)\dot{q}$$

L'immagine di J è il sottospazio $R(J)$ in $\Re^r$ che individua le velocità dell'organo terminale che possono essere generate dalle velocità di giunto, nella configurazione assegnata al manipolatore;

Il nullo di J è il sottospazio $N(J)$ a cui appartengono le velocità di giunto che non producono alcuna velocità all'organo terminale, nella configurazione assegnata al manipolatore.

Se lo Jacobiano è a rango pieno, si ha:

$$dim(R(J)) = r \qquad\qquad dim(N(J)) = n - r$$

e l'immagine di J ricopre l'intero spazio

Al contrario, se lo Jacobiano degenera in una singolarità, la dimensione dell'immagine diminuisce e, allo stesso tempo, la dimensione del nullo aumenta, in quanto vale la relazione:

$$dim(R(J)) + dim(N(J)) = n$$ (n è la dimensione dello spazio dei giunti)

indipendentemente dal rango della matrice J.

Manipolatore ridondante, quando $N(J) \neq 0$

Sia $\dot{q}^*$ soluzione della $\nu = J(q)\dot{q}$ e P matrice tale che $R(P) \equiv N(J)$

Sia $\dot{q}_a$ vettore arbitrario di velocità nello spazio dei giunti

$$\dot{q} = \dot{q}^* + P\dot{q}_a \qquad\qquad J\dot{q} = J\dot{q}^* + JP\dot{q}_a = J\dot{q}^* = \nu$$

Inversione della cinematica differenziale

Si intende determinare le velocità di giunto che permettono di ottenere le velocità (lineare ed angolare) v dell'organo terminale desiderate, a partire da una postura iniziale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q)\dot{q} \qquad v = J(q)\dot{q}$$

Invertendo l'equazione cinematica differenziale (**J quadrata e di rango pieno**) è possibile determinare una possibile traiettoria ai giunti $\left(q(t), \dot{q}(t)\right)$ che riproduca la traiettoria assegnata

$$\dot{q} = J^{-1}(q)v \quad \Rightarrow \quad q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(\zeta)d\zeta$$

Regola di integrazione di Eulero – Velocità dei giunti all'istante t_{k+1}=$t_k + \Delta t$

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t \qquad \text{con} \qquad \dot{q}(t_k) = J^{-1}\left(q(t_k)\right)v(t_k)$$

Cinematica inversa dei manipolatori ridondanti

Se il manipolatore è ridondante ($r < n$), lo Jacobiano è una matrice rettangolare bassa e si pone il problema significativo di trovare le soluzioni (ne esisterà più di una) all'equazione $v = J(q)\dot{q}$.

Un possibile metodo di soluzione è quello di formulare il problema d'ottimo vincolato:

Minimizzare $$g(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T W \dot{q}$$ **Con il vincolo** $$v = J(q)\dot{q}$$

dove W è un'opportuna matrice (n x n) di peso, simmetrica e definita positiva.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$g(\dot{q},\lambda)=\frac{1}{2}\dot{q}^T W\dot{q}+\lambda^T(v-J\dot{q})$$

funzionale di costo modificato, con λ vettore incognito $(r\text{x}1)$ di moltiplicatori

Soluzione :

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial g(\dot{q},\lambda)}{\partial\lambda}\right)^T=0\Rightarrow v=J\dot{q}\\[2ex]\left(\dfrac{\partial g(\dot{q},\lambda)}{\partial\dot{q}}\right)^T=0\Rightarrow \dot{q}=W^{-1}J^T\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{q}=W^{-1}J^T\lambda\\ v=J\dot{q}\end{cases}$$

Sistema nelle due incognite $\dot{q}$ e λ

$$\begin{cases} \dot{q} = W^{-1}J^T\lambda \\ v = J\dot{q} \end{cases} \Rightarrow \quad v = JW^{-1}J^T\lambda$$

$\lambda = (JW^{-1}J^T)^{-1}v$ Se J è di rango pieno

Sostituendo in $\dot{q} = W^{-1}J^T\lambda$

$$\dot{q} = W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}v$$

Caso particolare: la matrice di peso *W* coincide con la matrice identità *I*

$$\dot{q} = J^+v$$

$$J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$$ **Pseudo inversa destra**

La soluzione ottenuta è quella che minimizza localmente la norma delle velocità ai giunti

Tutte (le infinite) soluzioni della cinematica differenziale inversa

Sia $\dot{q}^* = J^+\dot{p}$ soluzione dell'equazione $v = J\dot{q}$ che minimizza $\|\dot{q}\|$ per una assegnata $v \equiv \dot{p}$

con $\dot{q}^* = J^+\dot{p} = J^T(JJ^T)^{-1}\,\dot{p}$

In generale, anche il vettore così ottenuto è una soluzione:

$$\dot{q} = \dot{q}^* + P\dot{q}_d = J^+\dot{p} + \dot{q}_n$$

$R(P) \equiv N(J)$, quindi $\dot{q}_n \in N(J)$, ovvero $J\dot{q}_n = 0$

Infatti:

$$J\dot{q} = J(J^+\dot{p} + \dot{q}_n) = JJ^+\dot{p} + J\dot{q}_n = \dot{p}$$

Tutte (le infinite) soluzioni della cinematica differenziale inversa

Scelta possibile: $P \equiv J^* = I - J^+ J$

Infatti, per qualsiasi $\dot{q}$ vale $J(J^* \dot{q}) = J(I - J^+ J)\dot{q} = 0$

$\dot{q} = \dot{q}^* + P\dot{q}_d = J^+ \dot{p} + \dot{q}_n$ con $\dot{q}_d$ velocità di giunto qualsiasi

$$\Rightarrow \quad \dot{q} = J^+ \dot{p} + (I - J^+ J)\dot{q}_d$$

L'espressione è quella che ci assicura il minor discostamento di $\dot{q}$ da $\dot{q}_d$, poiché è anche la soluzione di un problema modificato di ottimizzazione vincolata (polarizzato su $\dot{q}_d$)

$$\min H = \frac{1}{2} \|\dot{q} - \dot{q}_d\| \quad \text{con vincolo} \quad J\dot{q} - v = 0$$

$$\dot{q} = J^{+}\dot{p} + (I - J^{+}J)\dot{q}_d$$

$\Uparrow$ *soluzione a norma minima (unica)*

$\Uparrow$ *soluzione dell'equazione omogenea associata*

$J^{+}\dot{p}$ velocità di giunto in corrispondenza della quale e solo in corrispondenza della quale si ha una variazione di $\dot{p}$

$(I - J^{+}J)\dot{q}_d$ velocità di giunto in corrispondenza della quale non può aversi variazione di $\dot{p}$ moti interni che riconfigurano manipolatore lasciando inalterata posizione ed orientamento dell'organo terminale

Come scegliere $\dot{q}_d$?

Minimizzazione di obiettivi

Sia $H(q)$ funzione obiettivo (secondario) derivabile

$H\big(q(t)\big)$ definita positiva

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}J^{+}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}(I - J^{+}J)\dot{q}_d$$

Se riusciamo mediante $\dot{q}_d$ ad imporre $\dot{H} < 0$ potremmo avvicinarci ad un minimo assoluto per H

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}J^{+}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}(I - J^{+}J)\dot{q}_d$$

Scelta tipica: $\dot{q}_d = -K\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T$ con $K > 0$

$$\Downarrow$$

$$\dot{H} = -K\frac{\partial H}{\partial q}(I - J^{+}J)\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T + \frac{\partial H}{\partial q}J^{+}\dot{p}$$

Il primo addendo è sicuramente negativo, mentre sul segno del secondo non si può dire niente

Esempi di task

$$H(q) = \min_{p,o} \left\| p(q) - o \right\|$$

$p :=$ generico punto del manipolatore
$0 :=$ punto su di un ostacolo
$\Rightarrow$ Massimizzando H si può riuscire ad aggirare un ostacolo.

$$H(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i - \overline{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2$$

q_{iM} $(q_{im}) :=$ rappresenta la massima (minima) escursione per la rispettiva variabile giunto e $\overline{q}_i$ è il valore medio della corsa .
$\Rightarrow$ Minimizzando H si può riuscire a stare lontano dai fine corsa.

$$H(q) = \sqrt{\det\left(J(q) J^T(q)\right)}$$

La H così definita rappresenta una misura della manipolabilità.
$\Rightarrow$ Massimizzando H si può riuscire a stare lontani dalle singolarità.

$$\dot{q} = J^+\dot{p} + (I - J^+J)\dot{q}_d = J^+\dot{p} - K(I - J^+J)\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T$$

Inversione cinematica

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + J^{-1}\big(q(t_k)\big)v(t_k)\Delta t$$

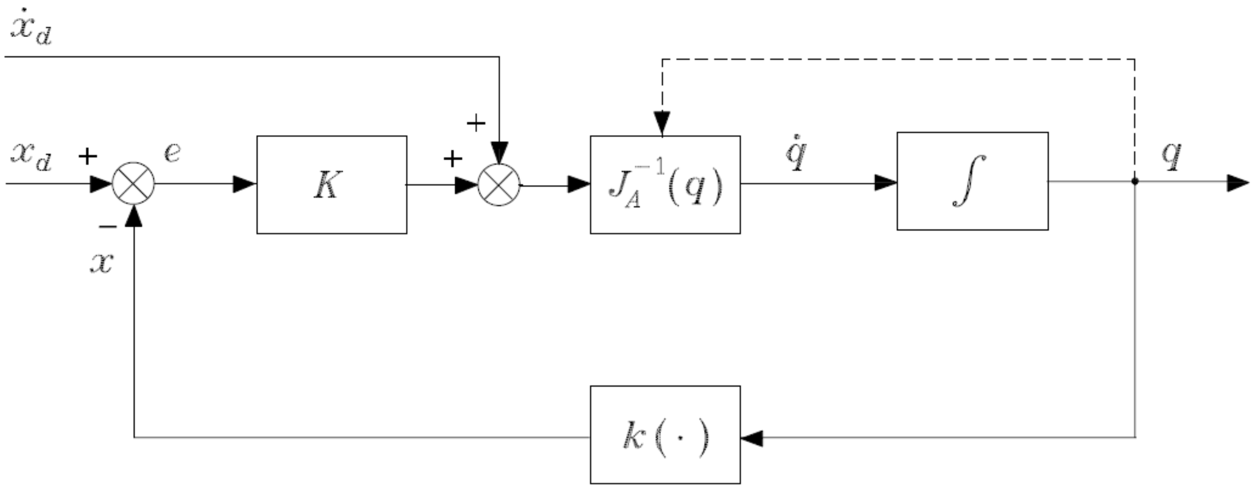
$$\left[q(t_{k+1}) \neq \int_0^{t_{k+1}} \dot{q}(\xi)d\xi + q(0) \right]$$

Deriva numerica: $e = x_d - x$

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q}$$

E’ necessario, nella definizione di un algoritmo di inversione, far dipendere $\dot{q}$ da e in modo tale che l’equazione differenziale precedente produca un $e(t)$ convergente (asintoticamente) a zero

(Pseudo-)inversa dello Jacobiano



$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)\left(\dot{x}_d + Ke\right)$$

$$\dot{e} = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{e} + Ke = 0$$

Per un manipolatore ridondante:

$$\dot{q} = J_A^{+}(q)\left(\dot{x}_d + Ke\right) + (I - J_A^{+} J_A)\dot{q}_0$$

Trasposta dello Jacobiano

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T K e \qquad V(e) > 0 \quad \forall e \neq 0, \quad V(0) = 0$$

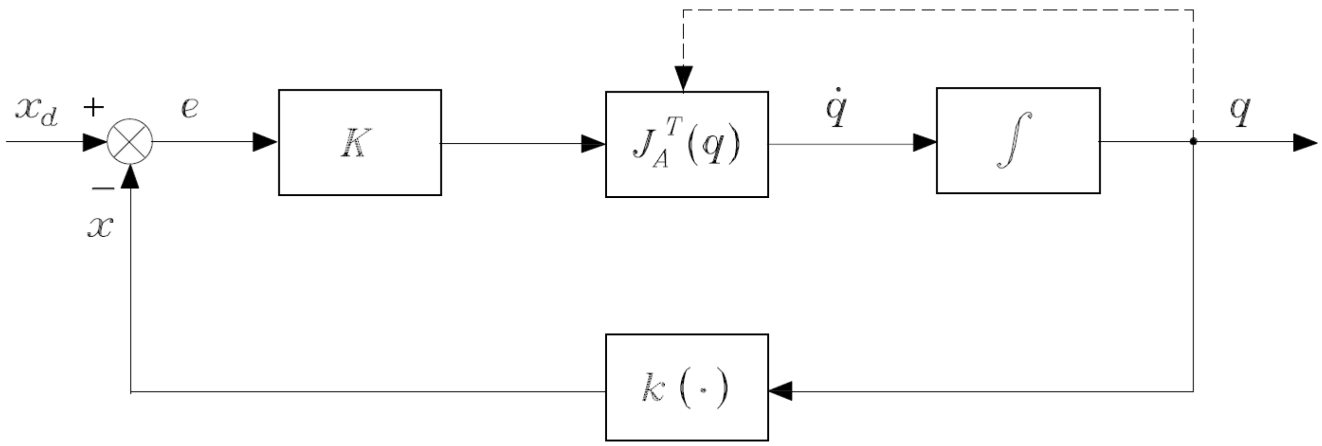
$$\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K \dot{x} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q)\dot{q}$$

Scegliamo le velocità dei giunti come: $\dot{q} = J_A^T(q) K e$

$$\dot{V} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e$$

Per un riferimento costante ($\dot{x}_d = 0$) risulta definita negativa.

($\dot{V} < 0$; $V > 0$ → sistema asintoticamente stabile)



$$\dot{q} = J_A^T(q)Ke$$

Trasposta dello Jacobiano

- Richiede solo il computo di funzioni cinematiche dirette
- Se il riferimento non è nullo la derivata della funzione di Lyapunov può essere resa definita negativa tramite un termine dipendente dalla (pseudo)inversa dello jacobiano (perdo i vantaggi)
- In ogni caso, anche utilizzando lo schema basato sul calcolo della traposta, l’errore di inseguimento si può mantenere limitato. Esso sarà tanto più piccolo quanto più grande è la norma della matrice dei guadagni K
- Tuttavia l’implementazione a tempo discreto dell’algoritmo impone limiti superiori della norma di K