Controllo dei Robot

Cinematica – Parte 2

Paolo Lino

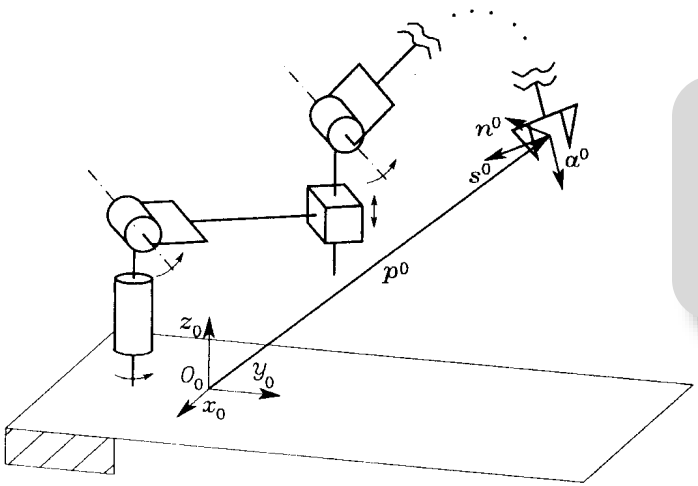
Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Politecnico di Bari

e-mail: paolo.lino [at] poliba.it

Cinematica diretta

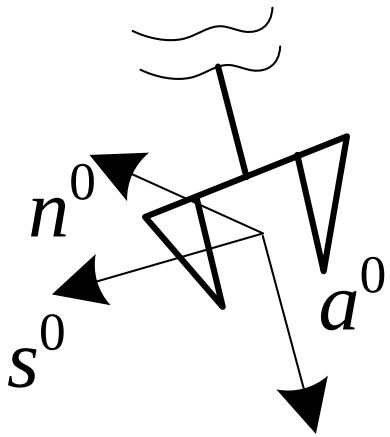
- Si consideri un manipolatore costituito da $n+1$ bracci connessi in cascata (catena aperta) tramite n giunti.
- Obiettivo della cinematica diretta è la determinazione della posizione e orientamento dell'organo terminale del manipolatore, noti i valori che assumono le variabili di giunto per ottenere detta posizione ed orientamento.



$$T^0(q) = \begin{bmatrix} n^0(q) & s^0(q) & a^0(q) & p^0(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinematica diretta

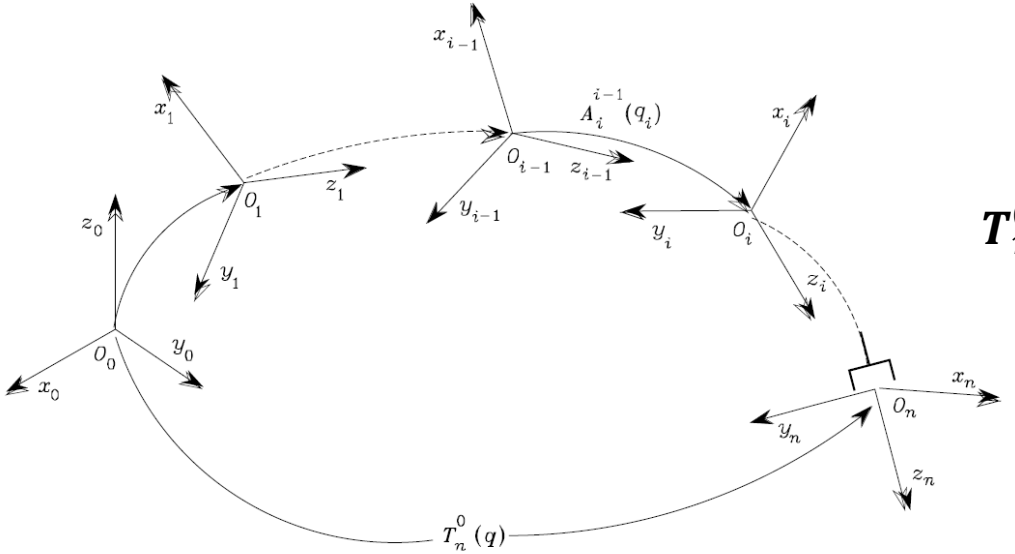
- La terna $O_0 - x_0 y_0 z_0$ è detta *terna base*. La terna solidale all'organo terminale, detta *terna utensile*, si sceglie in maniera conveniente di caso in caso.
- Con riferimento ad un organo pinza, l'origine della terna utensile si pone al centro della pinza
  - il versore a (approccio) si sceglie nella direzione d'avvicinamento ad un oggetto
  - il versore s (scivolamento) si sceglie normale ad a nel piano di scorrimento degli elementi prensili
  - il versore n (normale) si sceglie in modo da completare la terna e renderla levogira



Cinematica diretta

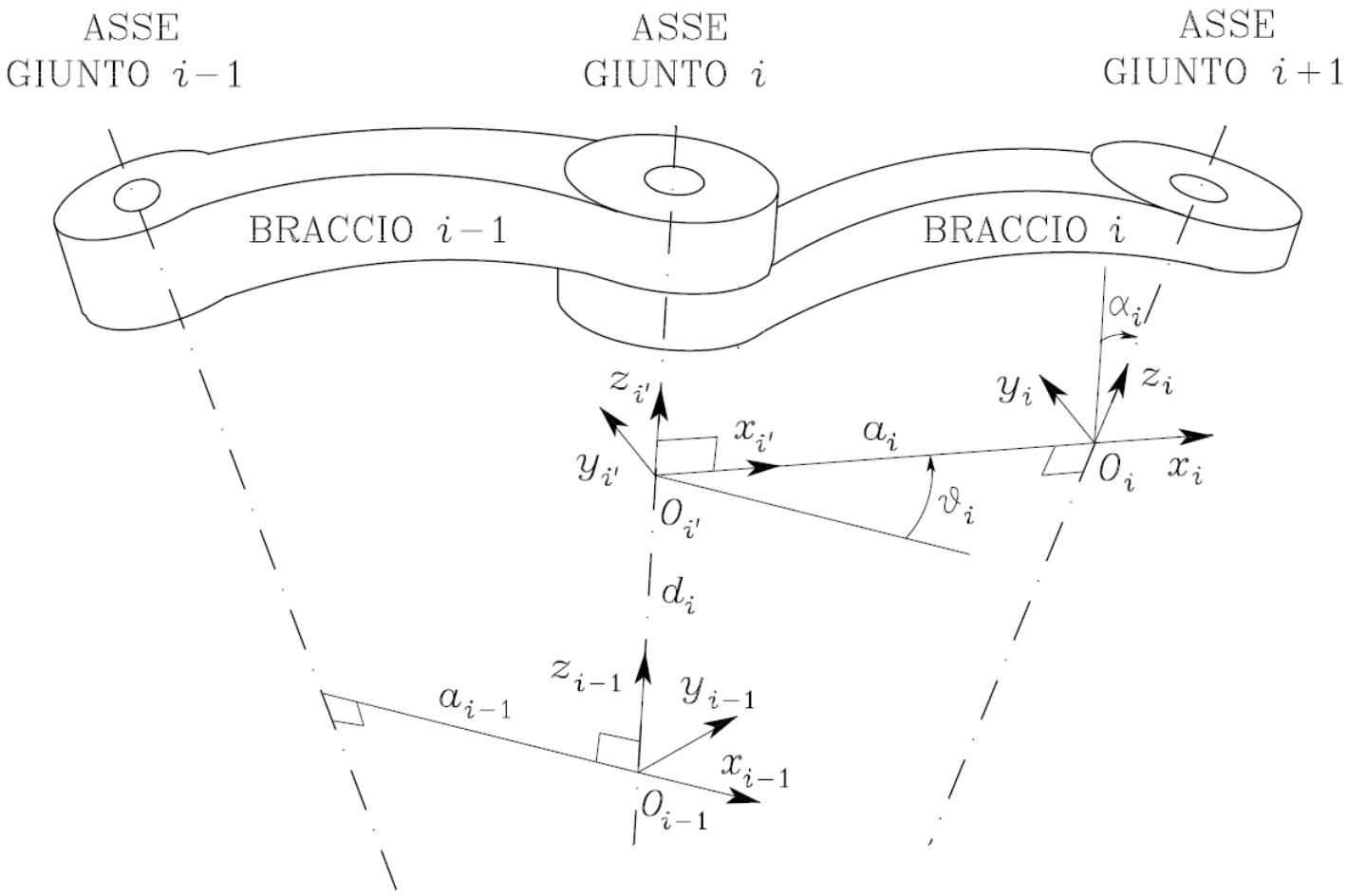
Computo della cinematica diretta

- Si considera isolatamente il problema della descrizione dei legami cinematici tra bracci consecutivi (occorre definire una terna solidale a ciascun braccio)
- Si risolve in maniera ricorsiva il problema della descrizione complessiva della cinematica del manipolatore



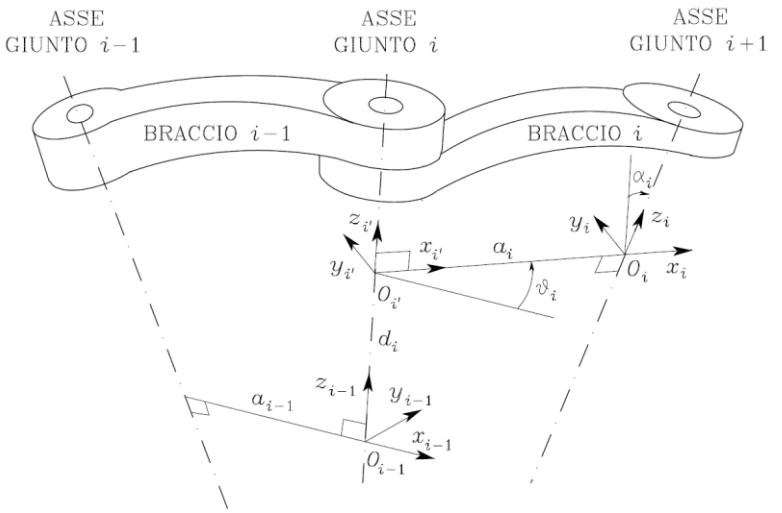
$$\boldsymbol{T}_n^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\boldsymbol{A}_2^1(q_2)\cdots\boldsymbol{A}_n^{n-1}(q_n)$$

Convenzione di Denavit – Hartenberg



Convenzione di Denavit – Hartenberg

- Con riferimento alla figura assumeremo come asse i l'asse del giunto che connette il braccio $i-1$ al braccio i.
- Per definire la terna $O_i - x_i y_i z_i$ solidale al braccio i si opera come segue:
  - Si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto $i+1$;
  - Si individua la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i. La normale comune a due rette sghembe è la retta a cui appartiene il segmento di minima distanza tra le rette.
  - Si individua O_i nel punto d'intersezione tra l'asse z_i e la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i. Indichiamo, poi, con $O_{i'}$ l'intersezione della normale comune, ricavata prima, con l'asse z_{i-1};
  - Si assume l'asse x_i diretto lungo la detta normale con verso positivo che va dal giunto i al giunto $i+1$;
  - Si scegli l'asse y_i in modo da completare la terna levogira.



Convenzione di Denavit – Hartenberg

In generale, la scelta della terna secondo questa convenzione è univoca, tranne che per i seguenti casi:

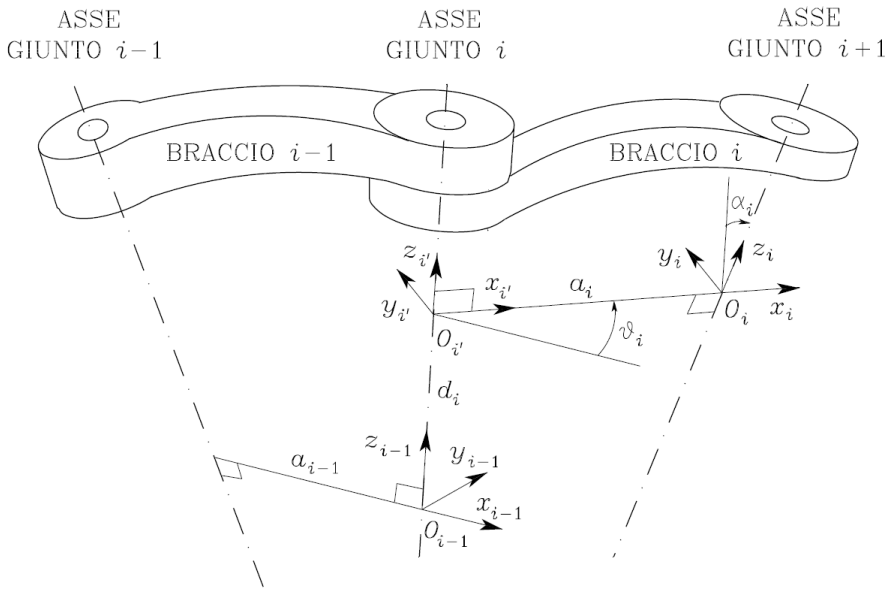
- Con riferimento alla terna base, l'origine O_0 e la direzione di x_0 non sono univocamente determinate, essendo mancante il giunto O_{-1}, quindi non si può determinare la normale comune. Pertanto solo la direzione dell'asse z_0 è determinata. In questo caso O_0 e x_0 si scelgono arbitrari.
- Con riferimento all'ultima terna, poiché non esiste il giunto $n+1$, l'asse z_n non può essere determinato, mentre x_n deve essere normale all'asse z_{n-1}. Poiché generalmente il giunto n è rotoidale, l'asse z_n si sceglie parallelo all'asse z_{n-1}.
- Quando due assi consecutivi sono paralleli, poiché la normale comune tra essi non è univocamente determinata.
- Quando due assi consecutivi si intersecano, poiché è impossibile stabilire il verso di x_i, essendo la normale comune un punto.

In tutti questi casi l'indeterminazione può essere sfruttata per semplificare la procedura ricercando, ad esempio, condizioni di allineamento tra assi delle terne consecutive.

Convenzione di Denavit – Hartenberg

Una volta definite le terne solidali ai bracci, la posizione e l'orientamento della terna i rispetto alla terna $i-1$ risultano completamente definiti dai seguenti parametri:

1. a_i *distanza tra le origini* O_i *ed* $O_{i'}$*;*
2. d_i *coordinata di* $O_{i'}$ *sull'asse* z_{i-1}
3. α_i *angolo intorno all'asse* x_i *tra l'asse* z_{i-1} *e l'asse* z_i*, valutato positivo in senso antiorario*
4. ϑ_i *angolo intorno all'asse* z_{i-1} *tra l'asse* x_{i-1} *e l'asse* x_i*, valutato positivo in senso antiorario*



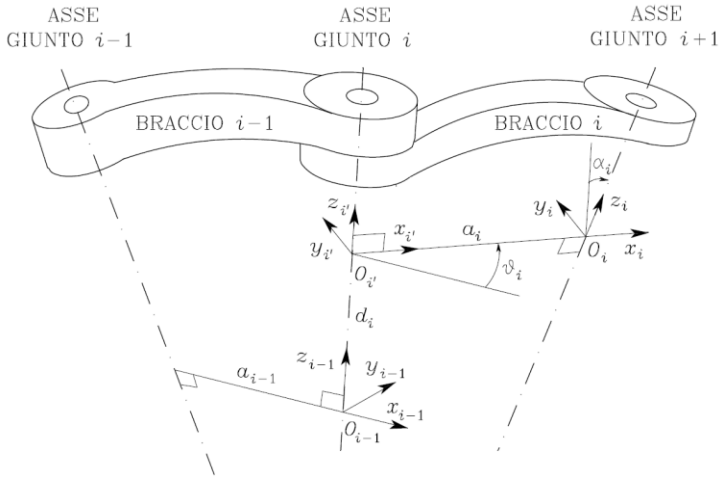
Dei quattro parametri, due (a_i, α_i) sono costanti una volta individuata la terna. Degli altri due, solo uno è variabile in dipendenza del tipo di giunto: se il giunto è rotoidale varia ϑ_i, se il giunto è prismatico varia d_i.

Convenzione di Denavit – Hartenberg

- A questo punto si è in grado di definire la trasformazione di coordinate che lega la terna i alla terna $i-1$.

1. Si parte dalla terna coincidente con la terna $i-1$;
2. Si trasla la terna scelta di d_i lungo l'asse z_{i-1}, in modo da fare coincidere le due origini O_{i-1} ed $O_{i'}$, successivamente si ruota la terna traslata di un angolo pari a ϑ_i intorno all'asse z_{i-1}, in modo da fare sovrapporre le due terne. Queste operazioni sono descritte dalla matrice:

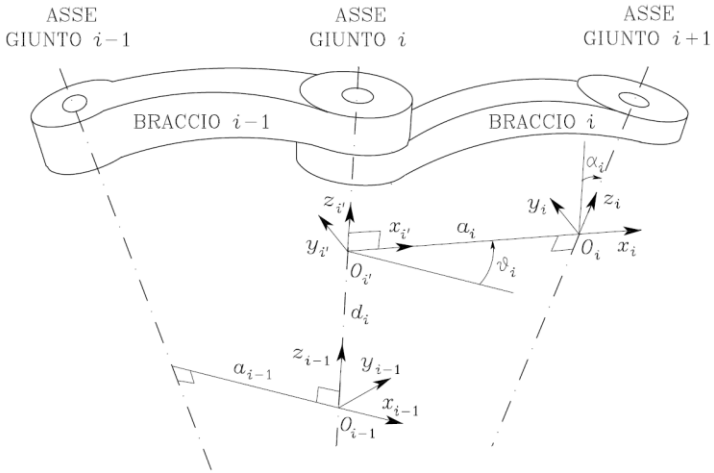
$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Convenzione di Denavit – Hartenberg

3. Si trasla la terna ora sovrapposta lungo, l'asse $x_{i'}$ della quantità a_i in modo da fare coincidere le due origini O_{i-1} ed O_i. Quindi si ruota la terna trasposta di un angolo pari ad α_i intorno all'asse $x_{i'}$, in modo da fare coincidere le terne z_i e z_{i-1}. Le operazioni appena eseguite sono rappresentate dalla matrice di rotazione:

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Convenzione di Denavit – Hartenberg

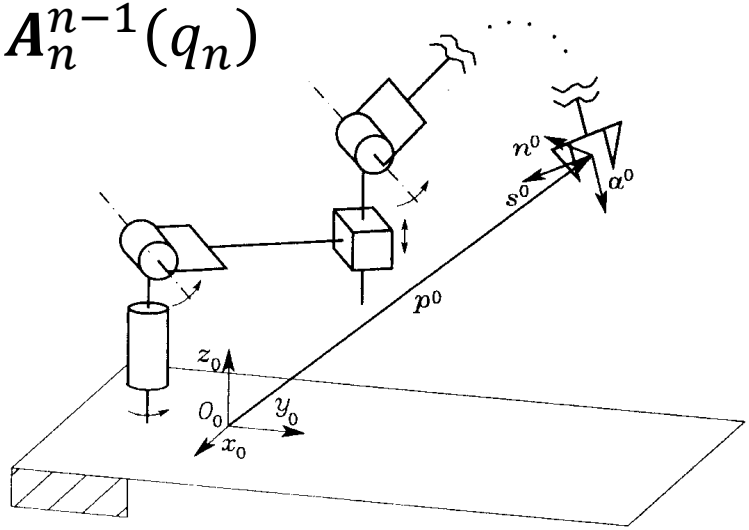
4. Avendo operato due trasformazioni di coordinate definite rispetto alla terna corrente, la trasformazione complessiva si ottiene dalla matrice:

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_{i'}^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

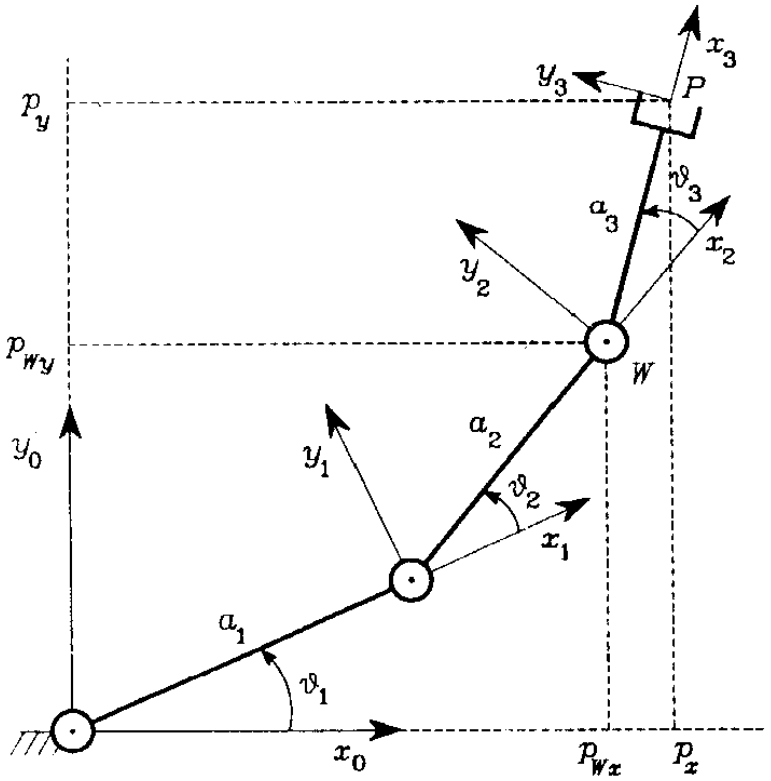
Cinematica diretta

- Definita la singola matrice di trasformazione, possiamo realizzare la procedura di costruzione della funzione cinematica diretta per composizione delle singole trasformazioni di coordinate, in un'unica matrice
- Dal momento che su ogni braccio è stata definita una terna ad esso solidale, la trasformazione di coordinate complessiva che esprime posizione ed orientamento della terna n rispetto alla terna base è data da:

$$\boldsymbol{T}_n^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\boldsymbol{A}_2^1(q_2)\cdots\boldsymbol{A}_n^{n-1}(q_n)$$



Manipolatore planare a tre bracci



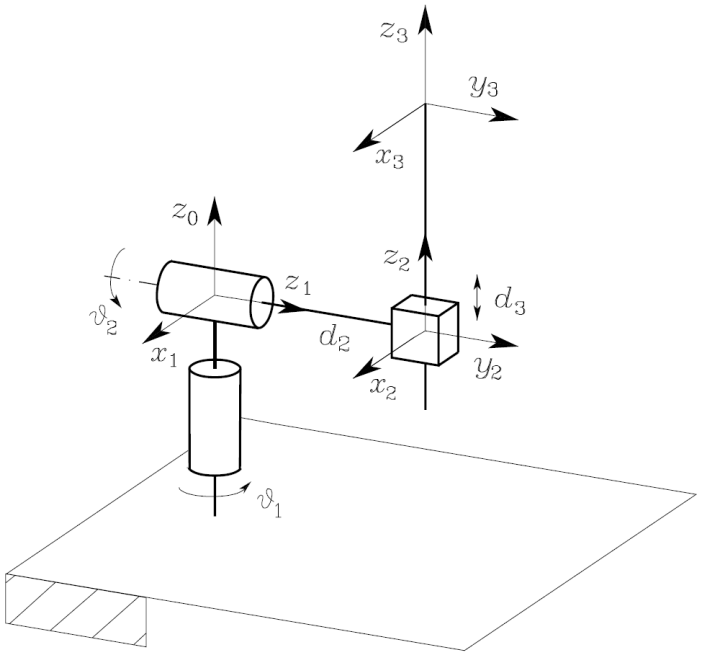
Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$A_1^0(\vartheta_1) = A_2^1(\vartheta_2) = A_3^2(\vartheta_3) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore sferico

Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0



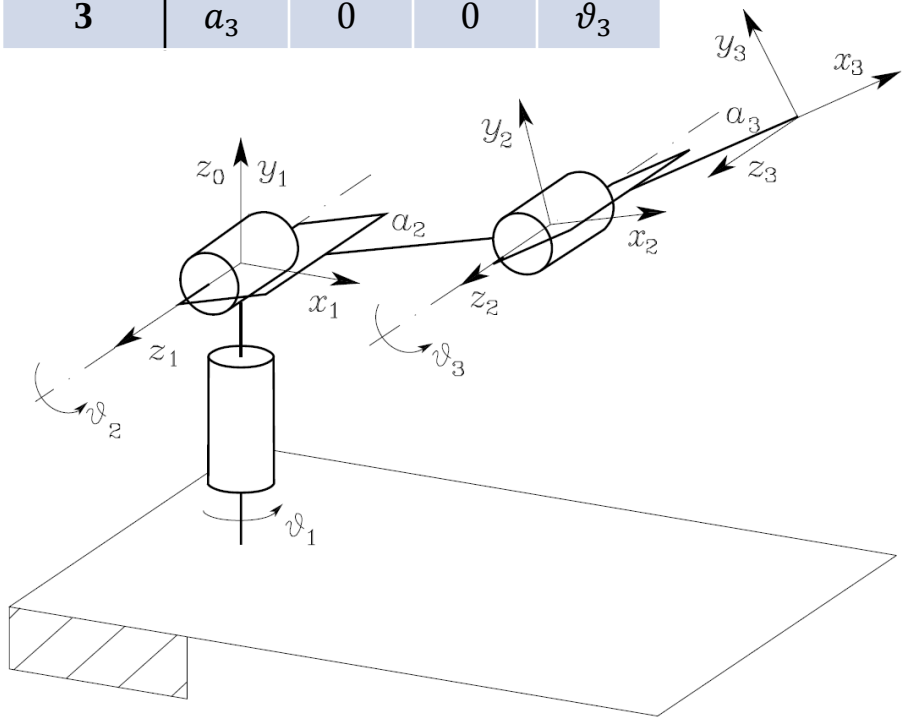
$$A_1^0(\vartheta_1)=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1(\vartheta_2)=\begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(d_3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n^0(q)=A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(d_3)=\begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3-s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3-c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo

Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

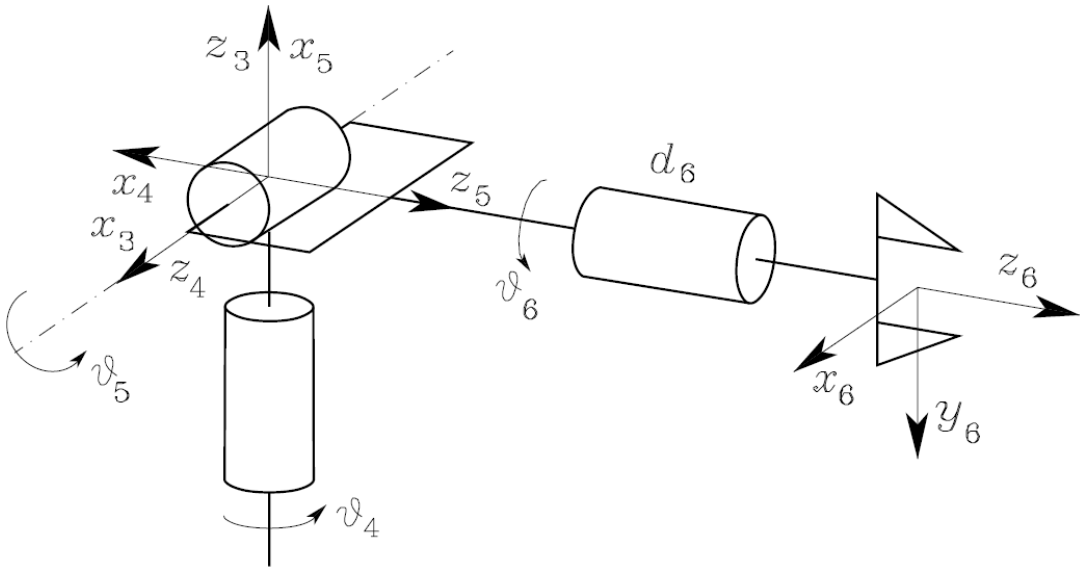


$$A_1^0(\vartheta_1)=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1(\vartheta_2)=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

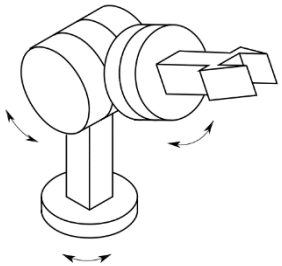
$$A_3^2(\vartheta_3)=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0(q)=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2s_2+a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polso sferico

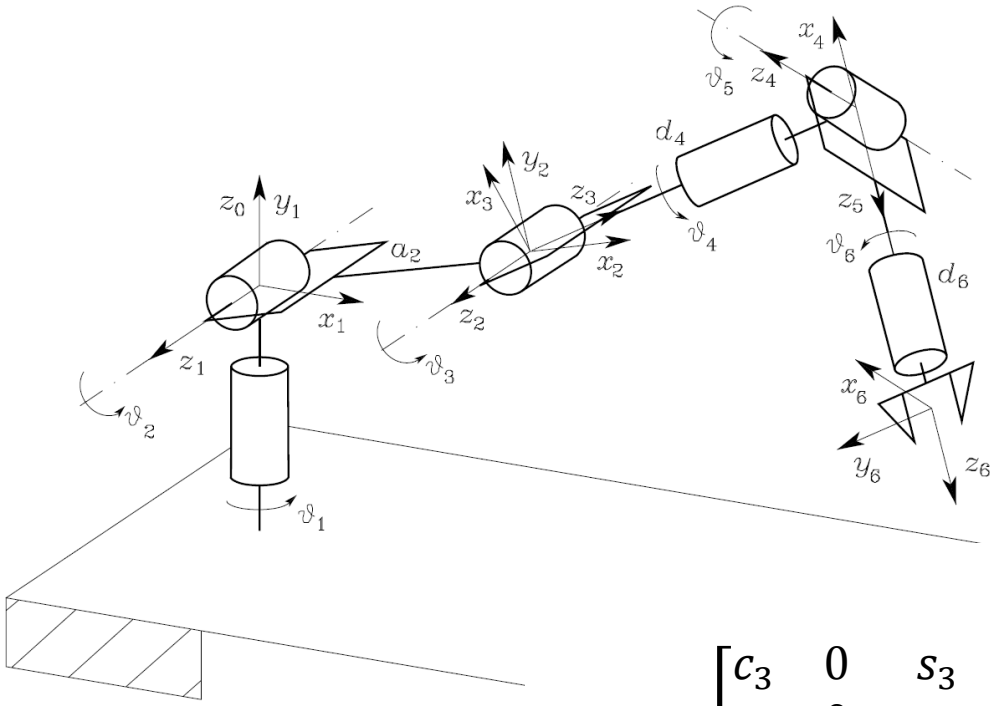


Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6



$$T_6^3(q) = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5c_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	0	$\pi/2$	0	ϑ_3
4	0	$-\pi/2$	d_4	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo con polso sferico

$$\boldsymbol{p}^0 = \begin{bmatrix} a_2c_1c_2 + d_4c_1s_{23} + d_6[c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_1s_4s_5] \\ a_2c_1c_2 + d_4s_1s_{23} + d_6[s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5] \\ a_2s_2 - d_4c_{23} + d_6(s_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1[c_{23}(c_4c_5s_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ s_1[c_{23}(c_4c_5s_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_{23}s_5c_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(-s_4c_5s_6 + c_4s_6) \\ s_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - s_{23}s_5s_6] - c_1(-s_4c_5s_6 + c_4s_6) \\ -s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4s_6) - c_{23}s_5s_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_1s_4s_5 \\ s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5 \\ s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix}$$

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}^0 & \boldsymbol{s}^0 & \boldsymbol{a}^0 & \boldsymbol{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spazio dei giunti e spazio operativo

Se si fa riferimento ad una rappresentazione minima dell'orientamento è possibile descrivere il posizionamento del manipolatore mediante un vettore di dimensione $m \times 1$, con $m = 6$.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{p}$ caratterizza la posizione dell'organo terminale
$\boldsymbol{\phi}$ caratterizza il suo orientamento (altre tre componenti).

Lo spazio in cui è definito il vettore $\boldsymbol{x}$ è quello rispetto al quale viene tipicamente specificata l'operazione richiesta al manipolatore.

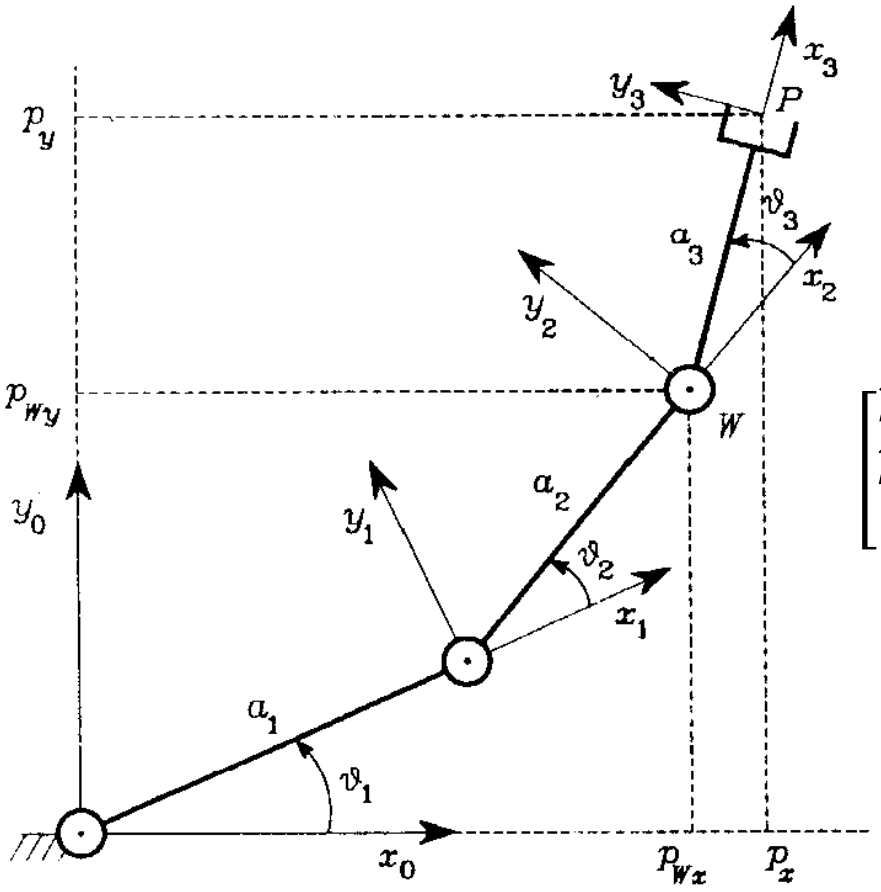
Pertanto esso è denominato *spazio operativo*. Il vettore $\boldsymbol{x}$, come sappiamo, è funzione delle variabili di giunto.

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Lo spazio in cui è definito il vettore $n \times 1$ delle variabili di giunto è definito *spazio dei giunti* o delle configurazioni. $q_i = \vartheta_i$ per giunti rotoidali e $q_i = di$ per giunti prismatici.

$\boldsymbol{x} = k(\boldsymbol{q})$ Equazione della **Cinematica Diretta**

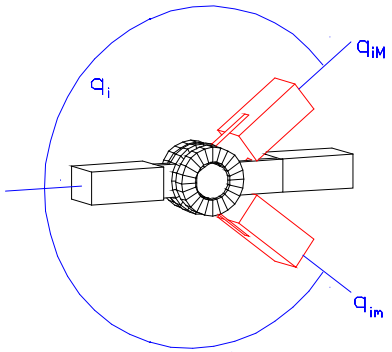
Spazio dei giunti e spazio operativo



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = k(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

Spazio di lavoro

- Con riferimento allo spazio operativo, si definisce *spazio di lavoro* di un manipolatore la regione descritta dall'origine della terna utensile quando ai giunti del manipolatore si fanno eseguire tutti i moti possibili.
  - spazio *di lavoro raggiungibile* è lo spazio di lavoro che la terna utensile può descrivere con almeno un orientamento
  - *spazio di lavoro destro* (o di destrezza) è la regione che l'origine della terna utensile può descrivere assumendo tutti gli orientamenti possibili.
- Ovviamente lo spazio di lavoro destro è un sottoinsieme dello spazio di lavoro raggiungibile.



$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \qquad q_{im} \leq q_i \leq q_{iM},\ i = 1, \dots, n$$

Problema cinematico inverso

$$\boldsymbol{T}_n^0(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\boldsymbol{A}_2^1(q_2)\cdots\boldsymbol{A}_n^{n-1}(q_n)$$

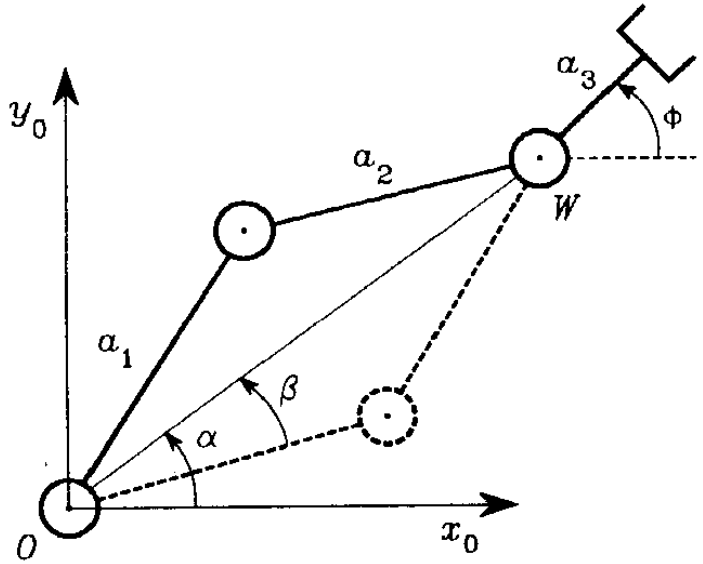
- Le equazioni da risolvere sono, in genere, non lineari delle quali non sempre è possibile trovare una *soluzione analitica* (in forma chiusa);
- Si possono avere *soluzioni multiple*
- Si possono avere *infinite soluzioni,* come nel caso di un manipolatore ridondante;
- Possono non esistere *soluzioni ammissibili*, data la struttura cinematica del manipolatore.

Problema cinematico inverso

- Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni, questa è garantita se posizione ed orientamento assegnati appartengono allo spazio di lavoro destro del manipolatore.
- La determinazione di soluzioni in forma chiusa richiede:
  - *Intuizione algebrica*
  - *Intuizione geometrica*
  - *Tecniche numeriche di soluzione*

Soluzione del manipolatore planare a tre bracci

$$T_3^0(q)=\begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1+a_2c_{12}+a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1+a_2s_{12}+a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & a_1c_1+a_2c_{12}+a_3c_\phi \\ s_\phi & c_\phi & 0 & a_1s_1+a_2s_{12}+a_3s_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$



$$=\begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & W_x+a_3c_\phi \\ s_\phi & c_\phi & 0 & W_y+a_3s_\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione del manipolatore planare a tre bracci

$$\begin{cases} W_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ W_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ \phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_x^2 + W_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{W_x^2 + W_y^2 - a_1^2 + a_2^2}{2a_1 a_2} \\ s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \vartheta_2 = \operatorname{atan2}(s_2, c_2)$$

La soluzione esiste se $-1 \leq c_2 \leq 1$, altrimenti il punto assegnato sta al di fuori dello spazio di lavoro raggiungibile. Inoltre, il segno positivo indica la configurazione a gomito basso, mentre il segno negativo quella a gomito alto.

Ricavato ϑ_2 si sostituisce nel sistema trovato precedentemente, il quale diventa un sistema nelle due incognite s_1 e c_1. Ricavate queste ultime, si ottiene $\vartheta_1 = \operatorname{atan2}(s_1, c_1)$.

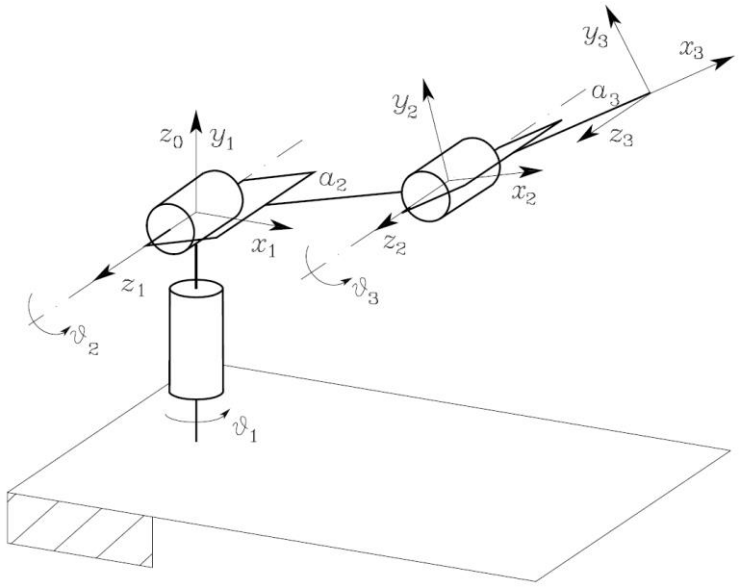
Infine si ricava $\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$.

Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_z = a_2s_2 + a_3s_{23}$$



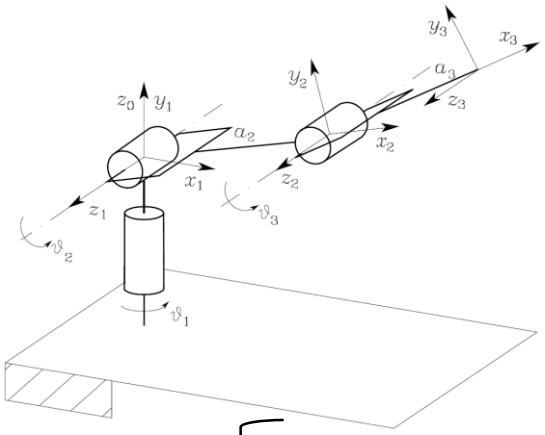
$$T_3^0(q) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1c_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{matrix}}^{R_3^0} & \begin{matrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ a_2s_2 + a_3s_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_z = a_2s_2 + a_3s_{23}$$



$$\begin{cases} W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3 \\ s_3^2 + c_3^2 = 1 \qquad\qquad -1 \le c_3 \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_3 = \dfrac{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \\ s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \vartheta_3 = atan2(s_3, c_3)$

Due soluzioni, in relazione al segno di s_3

$$\begin{cases} \vartheta_{3,\mathrm{I}} \in [0, \pi] \\ \vartheta_{3,\mathrm{II}} = -\vartheta_{3,\mathrm{I}} \end{cases}$$

Determinato ϑ_3 si può ricavare ϑ_2

Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \qquad W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$\begin{cases} W_x^2 + W_y^2 = (a_2c_2 + a_3c_{23})^2 \\ W_z = a_2s_2 + a_3s_{23} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2c_2 + a_3c_{23} = \pm\sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ W_z = a_2s_2 + a_3s_{23} \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{\pm\sqrt{W_x^2 + W_y^2}(a_2 + a_3c_3) + W_z a_3 s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3} \qquad s_2 = \frac{W_z(a_2 + a_3c_3) \mp \sqrt{W_x^2 + W_y^2}a_3s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3}$$

⇨ $\vartheta_2 = atan2(s_2, c_2)$

4 soluzioni, in relazione al segno di s_3

$$\begin{cases} \vartheta_{2,\mathrm{I}},\ \vartheta_{2,\mathrm{II}} & s_3^+ \\ \vartheta_{2,\mathrm{III}},\ \vartheta_{2,\mathrm{IV}} & s_3^- \end{cases}$$

Determinati ϑ_3 e ϑ_2 si può ricavare ϑ_1

Soluzione del manipolatore antropomorfo

$$W_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

$$W_z = a_2s_2 + a_3s_{23}$$

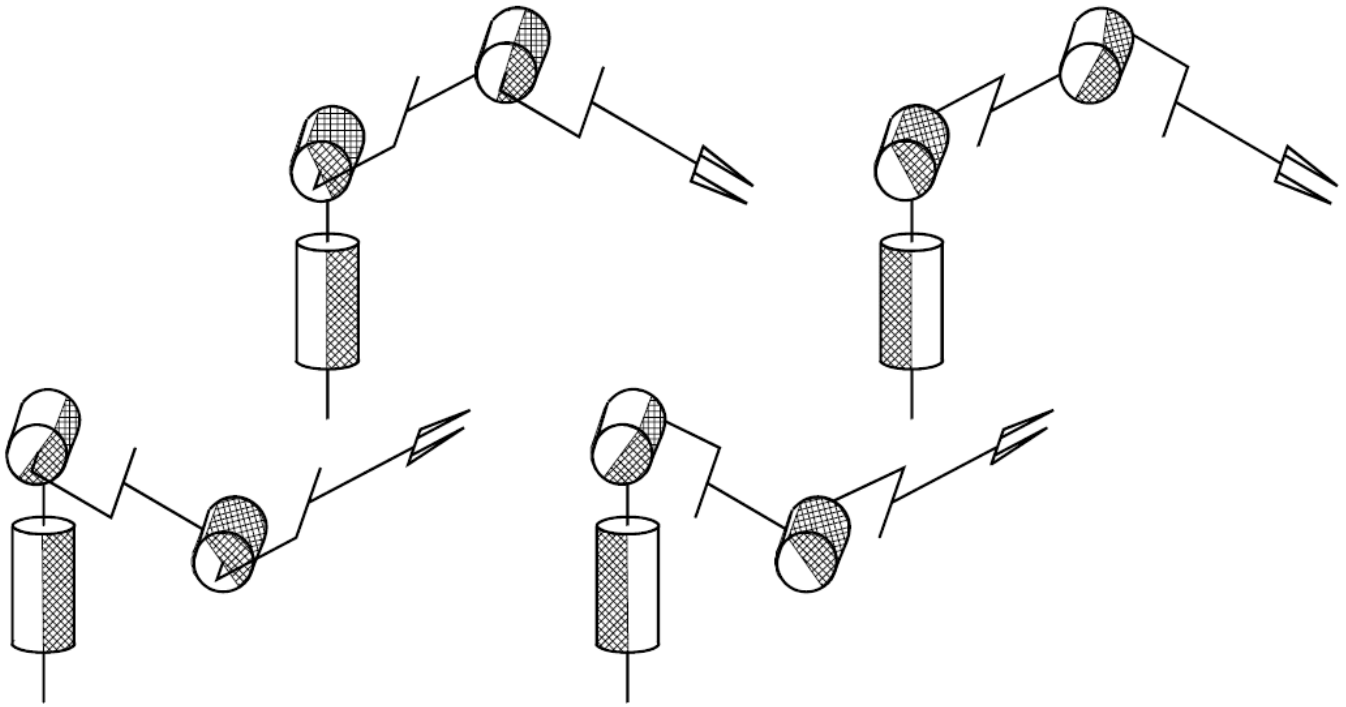
$$W_x^2 + W_y^2 = (a_2c_2 + a_3c_{23})^2$$

$$\begin{cases} W_x = \pm c_1\sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ W_y = \pm s_1\sqrt{W_x^2 + W_y^2} \end{cases}$$

⇨ Due soluzioni

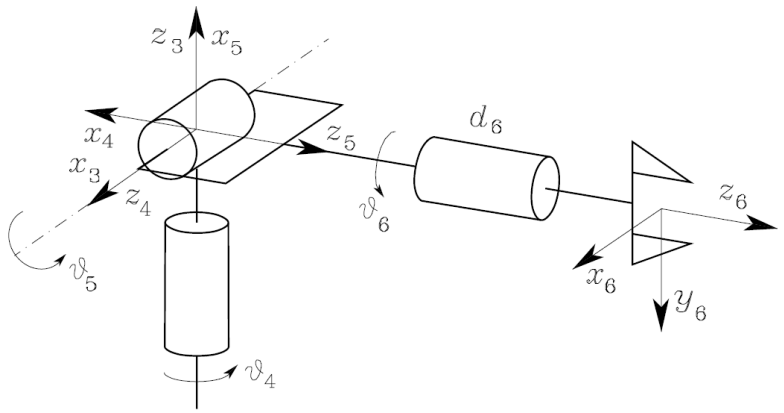
$$\begin{cases} \vartheta_{1,\mathrm{I}} = atan2(W_y, W_x) \\ \vartheta_{1,\mathrm{II}} = atan2(-W_y, -W_x) \end{cases}$$

Soluzione del manipolatore antropomorfo



4 configurazioni ammissibili

Soluzione del polso sferico



$$R_6^3 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$

Si vogliono determinare le variabili di giunto ϑ_4, ϑ_5, ϑ_6 corrispondenti all'orientamento assegnato dell'organo terminale mediante la matrice R_6^3

Soluzione del polso sferico

A seguito della scelta fatta per le terne di coordinate per il polso sferico, la matrice R_6^3 coincide con la matrice di rotazione degli angoli di Eulero ZYZ

$$T_6^3(q) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5c_6 & c_5 \end{matrix}}^{R_6^3} & \begin{matrix} c_4s_5d_6 \\ s_4s_5d_6 \\ c_5d_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{EUL} = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta c_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

⇨ E’ possibile sfruttare la soluzione del problema inverso già individuata

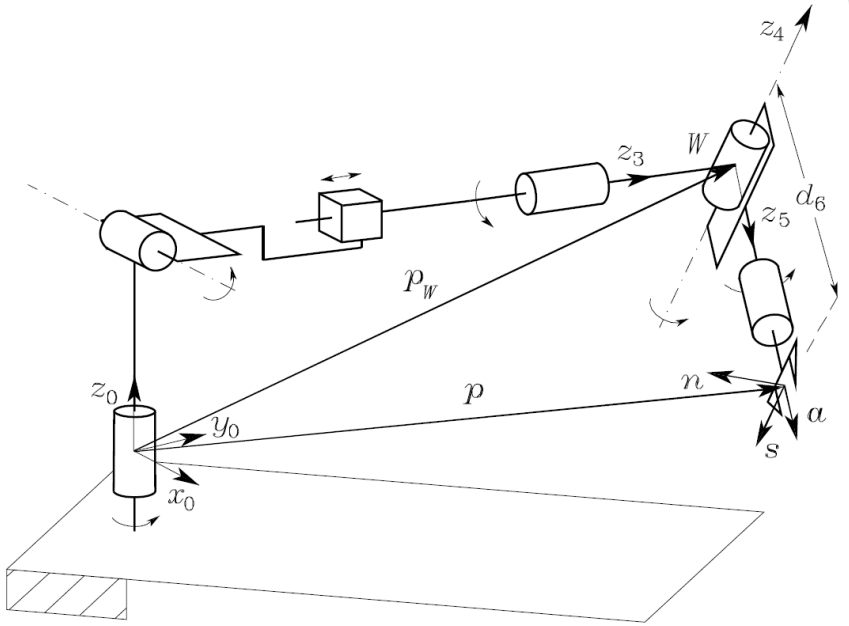
Soluzione del polso sferico

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5c_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_5 \in (0,\pi) \begin{cases} \vartheta_4 = atan2(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta_5 = atan2\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \vartheta_6 = atan2(r_{32}, -r_{31}) \end{cases}$$

$$\vartheta_5 \in (-\pi,0) \begin{cases} \vartheta_4 = atan2(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta_5 = atan2\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \vartheta_6 = atan2(-r_{32}, r_{31}) \end{cases}$$

Soluzione di manipolatori con polso sferico



Una struttura cinematica a 6 gradi di mobilità ha soluzione analitica alla cinematica inversa se:

- Tre assi di giunti rotoidali adiacenti s'incontrano in un punto, come avviene appunto nel caso di polso sferico;
- Tre assi di giunti rotoidali adiacenti sono paralleli.

- Si può individuare un punto W opportuno lungo la struttura, la cui posizione sia esprimibile in funzione della posa assegnata e in funzione di un insieme ridotto di variabili di giunto
- Si articola il problema cinematico inverso in due sotto-problemi, disaccoppiando la soluzione per la posizione da quella per l'orientamento

Soluzione di manipolatori con polso sferico

Per un manipolatore con polso sferico la scelta naturale del punto W è in coincidenza con il punto d'intersezione dei tre assi di giunto.

Infatti, una volta assegnati posizione ed orientamento della terna utensile in termini di $\boldsymbol{p}$ e di $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}]$, la posizione del centro del polso è individuata dalla relazione

$$\boldsymbol{p}_W = \boldsymbol{p} - d_6 \boldsymbol{a}$$

- Nel caso di strutture portanti a tre gradi di mobilità (non ridondante), la cinematica inversa può essere risolta secondo i seguenti passi:
  - Calcolare la posizione del polso $\boldsymbol{p}_W(q_1, q_2, q_3)$ secondo la relazione $\boldsymbol{p}_W = \boldsymbol{p} - d_6 \boldsymbol{a}$.
  - Risolvere la cinematica inversa per (q_1, q_2, q_3).
  - Calcolare $R_3^0(q_1, q_2, q_3)$
  - Calcolare $R_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = R_3^{0T} R$, essendo il polso sferico.
  - Risolvere la cinematica inversa per l'orientamento $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$.