Esercizi per il corso di Fondamenti di Automatica I

Ing. Elettronica N.O.

Docente: Dott. Ing. Luca De Cicco

2 novembre 2009

Parte I

Exercise 1.

Si determini la trasformata di Laplace dei segnali:

$$x_1(t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

con $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Exercise 2.

Si determini la trasformata di Laplace del segnale causale:

$$x(t) = te^{-at} \sin(\omega t + \varphi) \cdot 1(t)$$

con $a \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\varphi \in \mathbb{R}$ con $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Exercise 3.

1. Considerato il segnale $x(t)$ in Figura 1 se ne determini la trasformata di Laplace $X(s)$.
2. Si consideri ora il segnale $x'(t)$ (derivata generalizzata) e se ne determini la trasformata di Laplace.

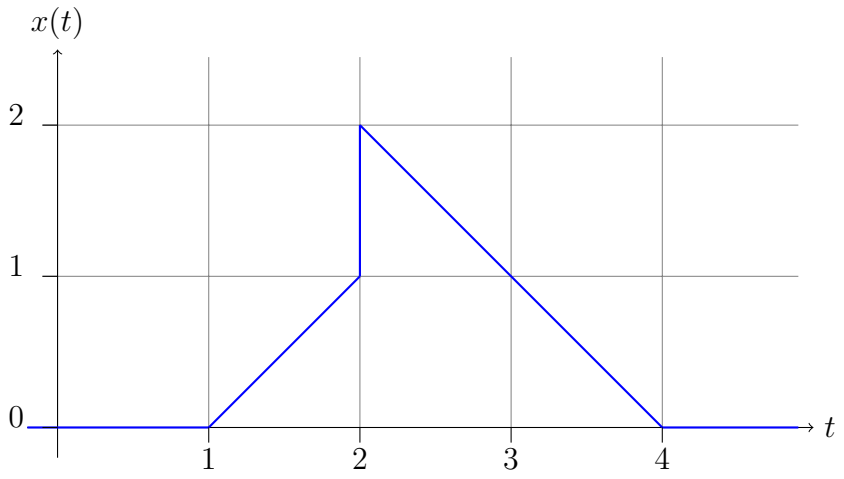


Figura 1: Segnale $x(t)$

Exercise 4.

Sia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

la funzione di trasferimento di un sistema LTI.

1. Si determini la risposta forzata del sistema all'ingresso:

$$u(t) = e^{-at}$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ (con $a = 0$ incluso).

2. Si specifichi in particolare cosa accade per $a = 1$, $a = 0$ e $a = 2$.

Exercise 5.

Considerata la seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+4s+4)}$$

si determini:

1. La risposta forzata all'ingresso $u(t) = 1(t)$
2. La risposta all'impulso $u(t) = \delta(t)$
3. Il valor finale della risposta del sistema al segnale $1(t) + 1(t-1)$.

Exercise 6.

Si consideri il sistema rappresentato in Figura 2, dove R_{cd} rappresenta la resistenza termica della giunzione tra la CPU (colorata in bianco) e il dissipatore (colorato in grigio), R_{de} quella tra il dissipatore e l'ambiente esterno, C_c la capacità termica della CPU, C_d quella del dissipatore e si considera infinita la capacità termica dell'ambiente esterno.

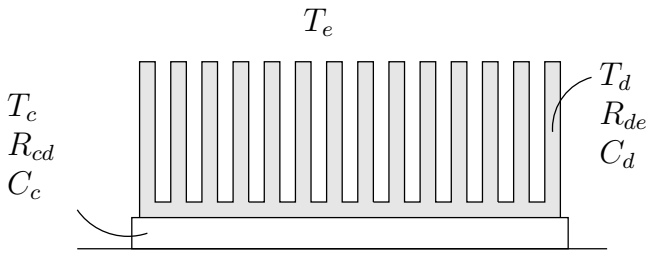


Figura 2: Sistema termico in esame

- Si determini il modello matematico del sistema avente per uscita la temperatura della CPU, T_c e per ingressi la temperatura esterna T_e e il flusso di calore q_J e una sua rappresentazione mediante uno schema a blocchi.
- **Facoltativo**: Si immagini adesso di applicare una ventola al dissipatore e si consideri che l'effetto della ventola sia quello di aumentare il coefficiente di convezione del dissipatore o equivalentemente di abbassarne la resistenza termica in funzione

della velocità angolare $\omega(t)$ della ventola. In particolare, si consideri che per effetto della ventola la resistenza del dissipatore valga in prima approssimazione:

$$R_{de}(\omega(t)) = \frac{1}{K_0 + K_1\omega(t)}$$

con $K_1, K_2 > 0$. Si determini l'ordine del sistema e in particolare si risponda ai seguenti quesiti:

- Il sistema è lineare?
- Il sistema è tempo invariante?

Exercise 7.

Si consideri la rete elettrica rappresentata in Figura 3.

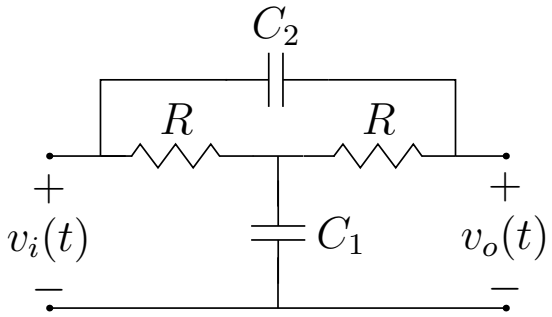


Figura 3: Rete elettrica a T

1. si determini la funzione di trasferimento $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$;
2. si dica al variare dei parametri positivi R, C_1 e C_2 se gli zeri possono essere complessi e coniugati;
3. si dica al variare dei parametri positivi R, C_1e C_2 se i poli del sistema possono essere complessi e coniugati.

Exercise 8.

Si determini la risposta al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ del sistema retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+4s+5)^2}$$

Si determini inoltre il valore di regime, se esiste, della risposta al gradino $u(t) = 5 \cdot 1(t)$.

Exercise 9.

Si consideri un sistema lineare e tempo invariante retto dal seguente modello matematico:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = u(t)$$

Si determini:

1. L'uscita del sistema all'ingresso rappresentato in Figura 4 a partire dalle condizioni iniziali $y(0_-) = 1$ e $y'(0_-) = 0$.

2. Determinare il valore di regime della risposta all'ingresso $u(t) = 1(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $y(0_-) = 10$, $y'(0_-) = -2$.

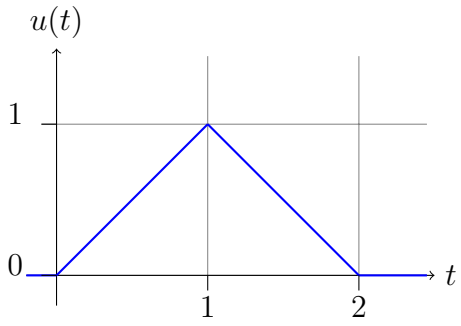


Figura 4: Segnale $u(t)$

Exercise 10.

Si determini il guadagno da $U(s)$ a $Y(s)$ del sistema rappresentato in Figura 5.

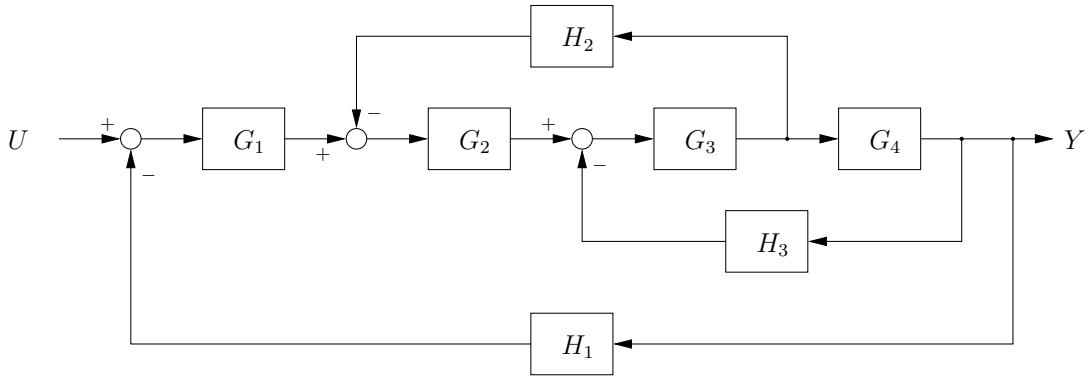


Figura 5: Schema a blocchi del sistema

Exercise 11.

Con riferimento allo schema a blocchi rappresentato in Figura 6:

1. si determini il guadagno da $U(s)$ a $Y(s)$, ovvero $G_{\circ 1}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

2. si determini il guadagno da $U(s)$ a $X(s)$, ovvero $G_{\circ 2}(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$

3. si determini in particolare la f.d.t. da $U(s)$ a $Y(s)$ quando:

$$G_1(s) = \frac{1}{1+\tau s}\,;\; G_2(s) = \frac{1}{1+2\tau s}\,;\; H_1(s) = 2\,;\; H_2(s) = 1$$

e si specifichi l'ordine del sistema e le sue caratteristiche.

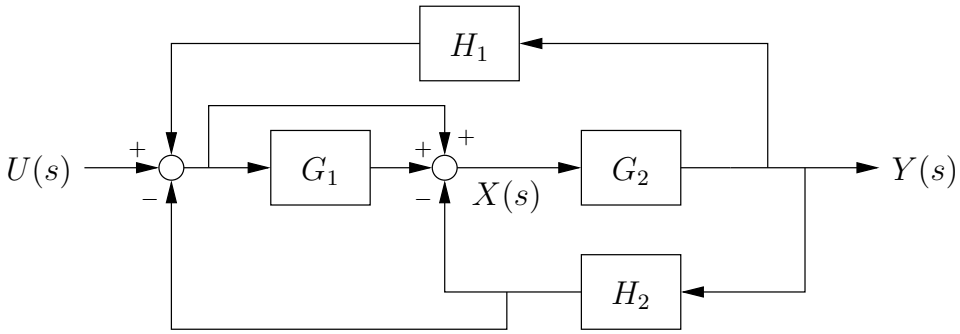


Figura 6: Schema a blocchi del sistema

Exercise 12.

Si consideri un sistema del primo ordine retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

Considerando la risposta al gradino del sistema:

1. si determini il tempo di assestamento al 2%

2. il tempo di ritardo t_d definito come l'istante per il quale l'uscita raggiunge il 50% del valore finale

3. si disegni la risposta al gradino unitario del sistema fornendo il maggior numero possibili di informazioni sul grafico.

4. Si determini la risposta $y(t)$ alla rampa unitaria $r(t) = t \cdot 1(t)$. Definendo $e(t) = y(t) - \frac{3}{2}r(t)$ si determini, se esiste il valore di regime di $e(t)$.

Exercise 13.

Un sistema lineare tempo invariante forzato con un ingresso a rampa unitaria $u(t) = t \cdot 1(t)$ a partire da condizione iniziali tutte nulle, produce il seguente segnale di uscita:

$$y(t) = (\frac{3}{2}t + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{7}{4}) \cdot 1(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema, specifichi l'ordine del sistema e di che tipo di sistema si tratta.

2. Determinare la risposta al gradino e se ha senso se ne determini il valore di regime della risposta.

Exercise 14.

Si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{1 + 2\alpha s}{1 + 2s}$$

Si determinino i valori di α tale che il tempo di assestamento al 2% del sistema sia pari a:

1. $t_{s,2\%} = 8\,\text{sec}$

2. $t_{s,2\%} = 4\,\text{sec}$

3. $t_{s,2\%} = 10\,\text{sec}$

Si disegni la risposta al gradino nel caso in cui $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$, fornendo il maggior numero possibili di informazioni sul grafico.

Exercise 15.

Si consideri il seguente sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 4}$$

Si determini l'uscita del sistema all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$ e se possibile si valuti il valore di regime della risposta.

Exercise 16.

Si consideri il sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{408}{s^2 + 8s + 204}$$

1. Si disegni con il maggior dettaglio possibile l'uscita all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$

2. Si determinino la massima sovraelongazione percentuale e il tempo di assestamento al 2%

Exercise 17.

Considerato il sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 0.4s + \omega_n^2}$$

si determini:

1. Il valore di ω_n tale che il tempo di picco sia pari a 1 sec
2. Con il valore di ω_n determinato al punto 1, si determini la massima sovraelongazione percentuale.
3. Si determini ora il valore di ω_n tale che la massima sovraelongazione percentuale sia pari ad un quarto rispetto a quella ottenuta al punto 2.
4. Si disegni la risposta del sistema ottenuto al punto 3 specificando il maggior numero possibile di informazioni sul grafico

Exercise 18.

Si consideri il sistema:

$$G_o(s) = \frac{100k_2^2}{(s+50)(s^2+k_1 s+k_2^2)}$$

si vogliono determinare i valori delle costanti k_1 e k_2 tali che:

1. Si determinino i vincoli sulle costanti positive k_1 e k_2 tali che il sistema sia approssimabile a un sistema del secondo ordine sottosmorzato
2. Si determinino i vincoli sulle costanti k_1e k_2 tali che il sistema sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato con massima sovraelongazione percentuale pari al 10%.
3. Si determini la coppia (k_1, k_2) tale che il sistema in esame sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato con massima sovraelongazione percentuale pari al 10% e con un tempo di assestamento al 2% pari a 0.5 sec.

Exercise 19.

Un sistema del secondo ordine elementare è stato sottoposto ad un ingresso a gradino e sono stati stimati i seguenti parametri del sistema valutando l'uscita $y(t)$ sull'oscilloscopio:

$$\overline{M}_{P\%} = 50\%$$
$$\bar{t}_{s,2\%} = 1 \text{ sec}$$

in entrambi i casi le misure sono affette da un errore stimato in 5% rispetto al valore nominale della stima.

Si determini la regione $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ del piano complesso nella quale possono essere situati i poli del sistema.

Exercise 20.

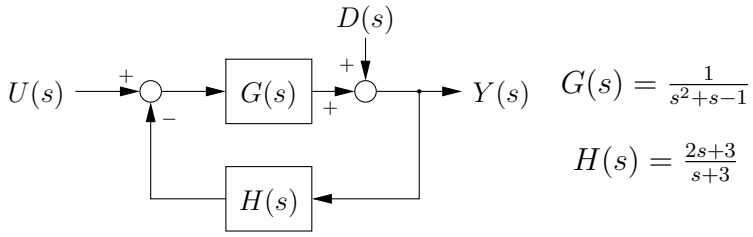
Si dimostri che la risposta al gradino $y_n(t)$ di un sistema avente n poli coincidenti in $-1/\tau$ con $\tau > 0$ e guadagno statico unitario:

$$G(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^n}$$

e' sempre minore (e dunque piu' lenta) della risposta al gradino di un sistema dello stesso tipo, ma di ordine $m < n$. (Suggerimento ricavare la risposta $y_n(t)$ e confrontarla con la risposta $y_m(t)$).

Exercise 21. (Primo esonero - a.a. 2008/2009)

Si consideri il sistema LTI il cui schema a blocchi è rappresentato in figura.

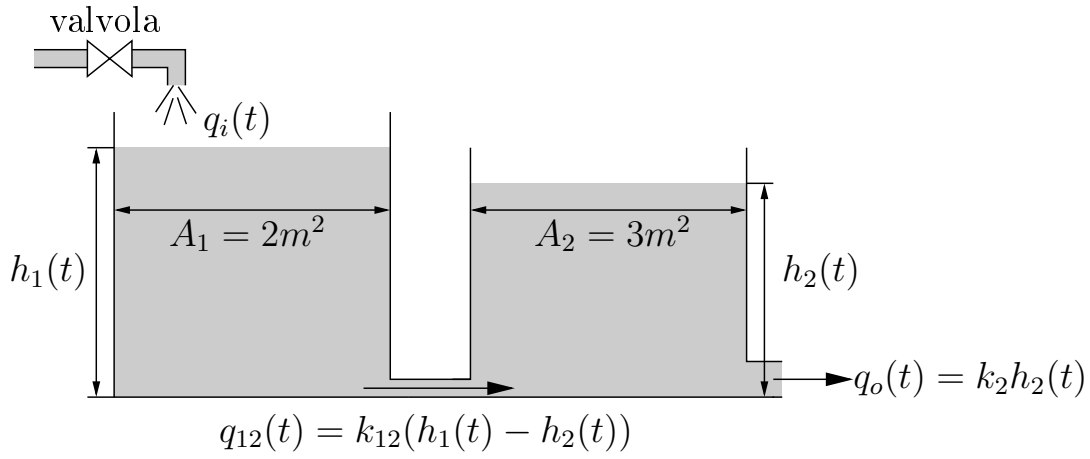


1. Si dica attraverso quale tipo di rete elettrica è possibile implementare la funzione di trasferimento $H(s)$

2. Si determini la risposta forzata $y(t)$ del sistema in anello chiuso, considerando $u(t) = 1(t)$ e $d(t) = \delta(t-2)$.

Exercise 22. (Primo esonero - a.a. 2008/2009)

Si vuole determinare il modello matematico di $h_2(t)$ per il sistema idraulico del secondo ordine rappresentato in figura dove $k_{12} = 1\,m^2/s$, $k_2 = 2\,m^2/s$, $q_i(t)$ è la portata in ingresso al primo serbatoio regolabile tramite la valvola.



1. Si orienti il sistema specificando ingressi e uscite del sistema e distinguendo variabili manipolabili da quelle non manipolabili (disturbi);

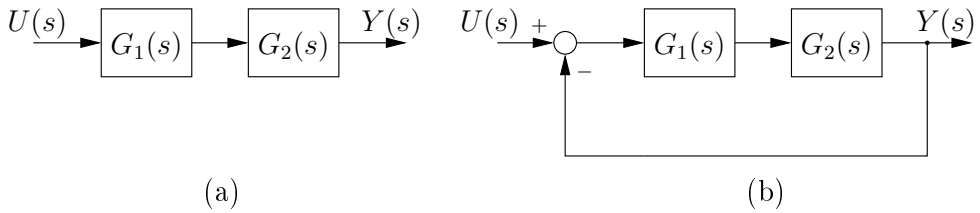
2. Si determini una rappresentazione a blocchi del sistema in figura;

3. Si determini la f.d.t. del sistema da $q_i(t)$ ad $h_2(t)$ riducendo lo schema a blocchi determinato al punto (2) e si dica se il sistema è sottosmorzato, sovrasmorzato o a smorzamento critico, giustificando la risposta.

4. Si disegni l'evoluzione forzata di $h_2(t)$ nel caso in cui $q_i(t) = 2 \cdot 1(t)\, m^3/s$ specificando sul grafico il maggior numero di informazioni.

Exercise 23. (Primo esonero - a.a. 2008/2009)

Si considerino due sistemi del primo ordine, $G_1(s)$ con guadagno statico pari a 2 e costante di tempo pari a 1 sec, $G_2(s)$ con guadagno statico unitario e costante di tempo di τ sec con $\tau \in \mathbb{R}_+$.



(a) (b)

1. Considerati i sistemi posti in cascata (figura (a)) si determini la f.d.t. dall'ingresso $U(s)$ all'uscita $Y(s)$ e si dica per quali valori di τ il sistema si può approssimare ad un sistema del primo ordine.

2. Si determinino i valori di τ per il quale la risposta al gradino del sistema in anello chiuso (figura (b)) risulta sottosmorzata

3. Si determinino i valori di τ per i quali la risposta al gradino del sistema in anello chiuso (figura (b)) presenta una massima sovraelongazione percentuale del 10%. Se esiste più di un valore di τ che soddisfa la specifica, si scelga il valore che corrisponde al più piccolo tempo di picco.

Parte II

Exercise 24.

Si consideri un sistema LTI retto dalla seguente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+a}{s(s+b)}$$

1. Si discuta la stabilità del sistema al variare dei due parametri reali a e b.
2. Si dica per quali valori di a e b il sistema risulta stabile BIBO.

Exercise 25.

Si consideri un sistema LTI la cui funzione di risposta all'impulso $g(t)$ è pari a:

$$g(t) = (e^{-t} + 1) \cdot 1(t)$$

Si caratterizzi la stabilità del sistema, e la stabilità BIBO giustificando sinteticamente la risposta.

Exercise 26.

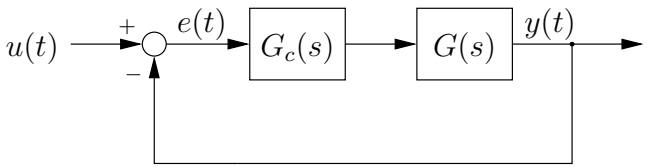


Figura 7:

Si consideri il sistema in Figura 7 dove:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}$$

Osservato che il sistema in anello aperto è instabile, si dica se è possibile stabilizzare il sistema con il controllore $G_c(s) = K$.

Exercise 27.

Si consideri il sistema in Figura 7 dove:

$$G(s) = \frac{s^2 - 0.1s + 1}{s^4 + s^3 - 4s^2 + 6s}\,;\; G_c(s) = K$$

1. Caratterizzare la stabilità del sistema in anello aperto
2. Si chiuda il sistema in retroazione unitaria e si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso al variare di $K \in \mathbb{R}$

Exercise 28.

Si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s^5 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 2}$$

1. Si caratterizzi la stabilità del sistema ed in caso di instabilità si indichino il numero di poli a parte reale positiva.

2. Si dica se è possibile stabilizzare il sistema impiegando lo schema in retroazione unitaria in Figura 7 dove $G_c(s) = K$

3. Si dica se è possibile stabilizzare il sistema impiegando lo schema in retroazione unitaria in Figura 7 dove:

   $$G_c(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

   con $z, p \in \mathbb{R}$.

Exercise 29.

Con riferimento al sistema in Figura 7 sia:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

1. Si determini la costante di un controllore proporzionale $G_c(s) = K$ che permetta al sistema in anello chiuso di ottenere un errore di posizione inferiore al 5%.

2. Supponendo di impiegare un controllore $G_c(s) = \frac{K}{s}$, si dica se è possibile determinare il valore di K tale che il sistema abbia un errore di velocità inferiore o uguale al 5%.

3. Si determini un controllore $G_c(s) = K/s$ che è in grado di ottenere un errore di posizione nullo ed il minimo errore di velocità finito.

Exercise 30.

Si disegni il luogo positivo e negativo della funzione di trasferimento di anello:

$$L(s) = \frac{s + 5}{s(s + 2)(s + 3)^2}$$

indicando il maggior numero di informazioni (punti di intersezione con gli assi, punti di emergenza/confluenza, angoli di arrivo/partenza). Si dica se il punto $s^* = -1 + j$ appartiene al luogo delle radici positivo.

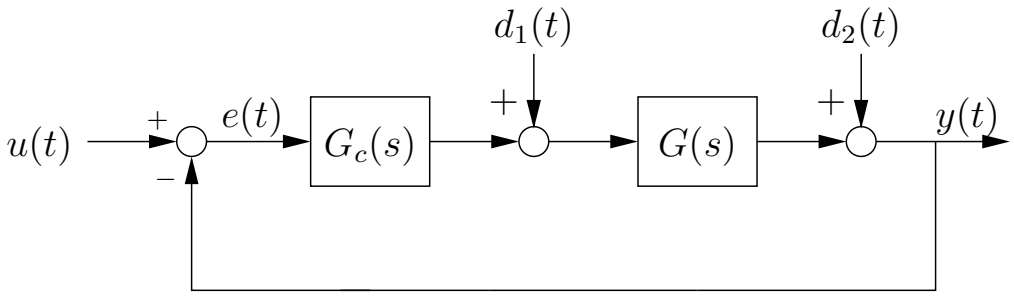


Figura 8:

Exercise 31.

Considerato il sistema in retroazione in Figura 8 per il quale:

$$G_c(s) = \frac{k}{s+4}\,;\, G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Si trovino le seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}\,;\, G_1(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)}\,;\, G_2(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)}\,;\, G_3(s) = \frac{E(s)}{U(s)}$$

- Si determini il valore k_{crit} del guadagno positivo k tale che il sistema risulti semplicemente stabile.
- Si calcoli il valore a regime dell'uscita $y(t)$ in risposta all'ingresso $u(t) = 5 \cdot 1(t) + 5\delta(t) + e^{-2t}1(t)$ quando $k = 0.2k_{crit}$
- Si calcoli l'uscita a regime in risposta ai disurbi $d_1(t) = 1(t)$ e $d_2(t) = 1(t) + \delta(t)$ quando $k = 0.2k_{crit}$

Exercise 32.

La risposta al gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante è:

$$y\left(t\right) = (1 - e^{-2t+2}\sin\left(3t-2\right))1\left(t-1\right)$$

Si determini l'espressione della corrispondente f.d.t. del plant$G_p\left(s\right)$ e si specifichi l'ordine del sistema.

Exercise 33.

La risposta al gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante è:

$$y\left(t\right) = k(1 - e^{-2t}\cos\left(3t\right))1\left(t\right)$$

1. Si determini l'espressione della corrispondente f.d.t. del plant $G_p\left(s\right)$.

2. Chiuso il sistema in retroazione unitaria, si valuti il valore di k tale che il sistema in anello chiuso presenti una coppia di poli complessi e coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 6\,\mathrm{rad/s}$

3. Si determinino errori di posizione, velocità ed accelerazione del sistema in anello chiuso

Exercise 34.

Si consideri un sistema in retroazione non unitaria per il quale si ha:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

Si determinino gli errori di posizione, velocita' e accelerazione avendo definito l'errore come $e(t) = u(t) - \frac{2}{3}y(t)$.

Exercise 35.

Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello:

$$L(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$$

Si discuta la stabilità del sistema per $k \in \mathbb{R}$.

Exercise 36.

Considerata seguente funzione di anello:

$$L(s) = \frac{s+1}{(s-3)(s^2+1)}$$

1. Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello

2. Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso per $k \in \mathbb{R}$

3. Supposto il sistema in retroazione unitaria, determinare la risposta al gradino del sistema quando $k = 2$.

Exercise 37.

Considerata seguente funzione di anello:

$$L(s) = \frac{(s+2)(s^2+2s+2)}{(s^2+1)^2}$$

1. Disegnare il luogo delle radici positivo e negativo della funzione di anello
2. Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso per $k \in \mathbb{R}$
3. Si dica se esistono valori di k per i quali il sistema è approssimabile ad un sistema del secondo ordine sottosmorzato

Exercise 38.

Si consideri un sistema in retroazione unitaria in cui le f.d.t. del controllore e del plant sono rispettivamente:

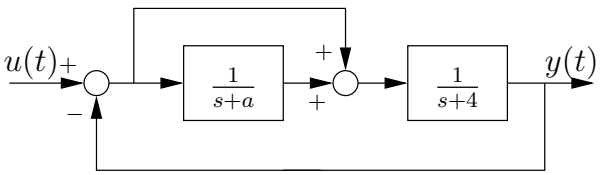
$$G_c(s) = 1 + \frac{a}{s}$$

$$G_p(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

1. Si disegni il luogo delle radici al variare di $a \in \mathbb{R}_+$
2. Si determini il valore di a tale che il sistema presenti una coppia di poli complessi e coniugati con parte reale -0.5.
3. In corrispondenza di tale valore di a si determini la risposta del sistema in anello chiuso al gradino unitario.

Exercise 39.

Con riferimento al sistema rappresentato nella figura seguente:



1. si disegni il luogo delle radici al variare di $a \in \mathbb{R}_+$ specificando ove presenti: gli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario, i punti di confluenza/emergenza, angoli di partenza del luogo dai poli e angoli di arrivo agli zeri;
2. si dica in che intervallo di a positivo il sistema in anello chiuso e' sottosmorzato;
3. Determinare i valori del parametro a tale che il sistema in anello chiuso abbia una coppia di poli complessi e coniugati avente parte immaginaria 0.5;
4. posto in ingresso al sistema un ingresso a gradino, si determini il valore di $a > 0$ per il quale la pulsazione delle oscillazioni dell'uscita $y(t)$ risulta massima. Qual'e' la massima pulsazione di oscillazione della risposta in corrispondenza del valore di a trovato?