Corso di Controllo dei Robot
Dinamica

Paolo Lino

Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Dinamica del manipolatore

$L = T - U$ *Lagrangiana* del sistema meccanico

T Energia cinetica totale del sistema
U Energia potenziale totale del sistema

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \zeta_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ζ_i è la forza generalizzata associata alla coordinata generalizzata λ_i

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \zeta_i$$

Per un manipolatore a catena aperta la scelta più naturale per le coordinate generalizzate è data dalle variabili di giunto $q = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^T = \boldsymbol{\zeta}$$

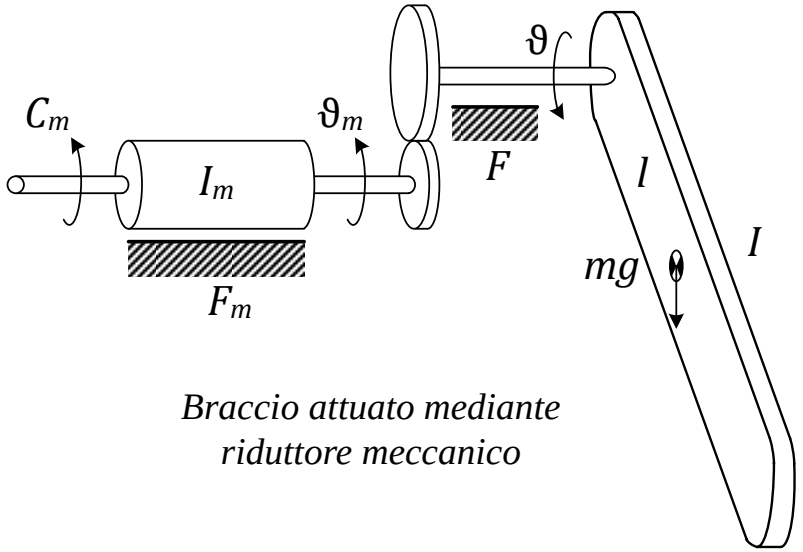
Alle **forze generalizzate** daranno contributo le **forze non conservative** che compiono lavoro su q_i, in altre parole le coppie generate ai giunti dagli attuatori, le coppie d'attrito dei giunti, nonché le coppie ai giunti indotte da forze esplicate dall'organo terminale sull'ambiente in situazione di contatto.

Il termine coppia è usato come sinonimo della forza generalizzata al giunto.

Esempio

$$k_r = \frac{r}{r_m} = \frac{\vartheta_m}{\vartheta} = \frac{\omega_m}{\omega}$$

rapporto di trasmissione della coppia cinematica



Braccio attuato mediante riduttore meccanico

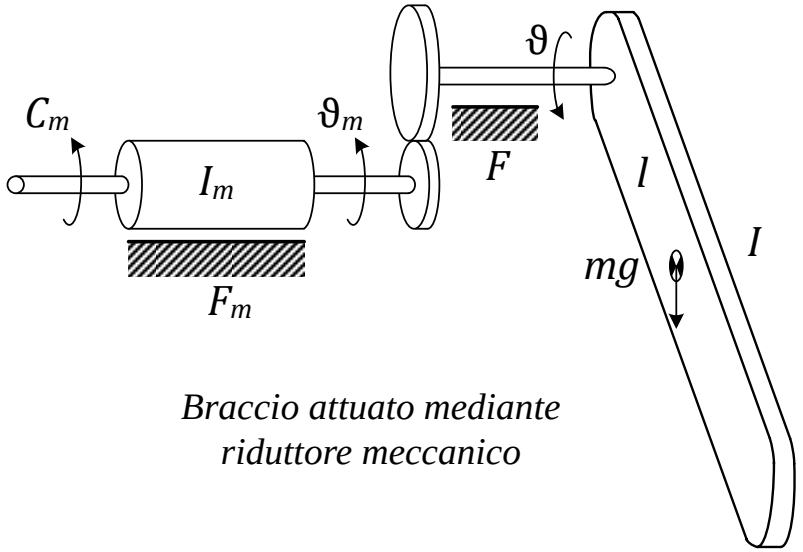
Le coppie ai giunti sono fornite dai motori tramite opportuni organi di trasmissione meccanica del moto.

In alternativa, si possono avere giunti azionati con motori calettati direttamente sull'asse di rotazione senza organi di trasmissione.

Esempio

$$k_r = \frac{r}{r_m} = \frac{\vartheta_m}{\vartheta} = \frac{\omega_m}{\omega}$$

rapporto di trasmissione della coppia cinematica



Braccio attuato mediante riduttore meccanico

$$\begin{cases} C_m = I_m\dot{\omega}_m + F_m\omega_m + fr_m \\ fr = I\dot{\omega} + F\omega + mgl\sin\vartheta \end{cases}$$

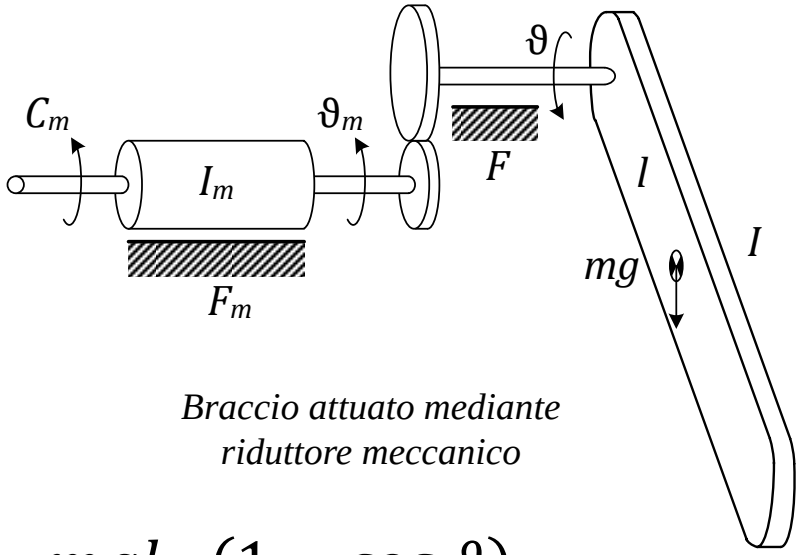
$$C_m = I_{eq}\dot{\omega}_m + F_{eq}\omega_m + \frac{mgl}{k_r}\sin\left(\frac{\vartheta_m}{k_r}\right)$$

$$I_{eq} = \left(I_m + \frac{I}{k_r^2}\right)$$

$$F_{eq} = \left(F_m + \frac{F}{k_r^2}\right)$$

Esempio

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\vartheta}^2 \\ U = mgl \cdot (1 - \cos\vartheta) \end{cases}$$



Braccio attuato mediante riduttore meccanico

$$L = T - U = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\vartheta}^2 - mgl \cdot (1 - \cos\vartheta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \zeta_i \quad \Rightarrow \quad (I + I_m k_r^2)\ddot{\vartheta} + mgl \sin\vartheta = \zeta$$

$$\zeta = \tau - F\dot{\vartheta} - F_m k_r^2 \dot{\vartheta}$$

$$(I + I_m k_r^2)\ddot{\vartheta} + (F + F_m k_r^2)\dot{\vartheta} + mgl \sin\vartheta = \tau$$

Determinazione dell'energia cinetica

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left(T_{\ell_i} + T_{m_i} \right)$$

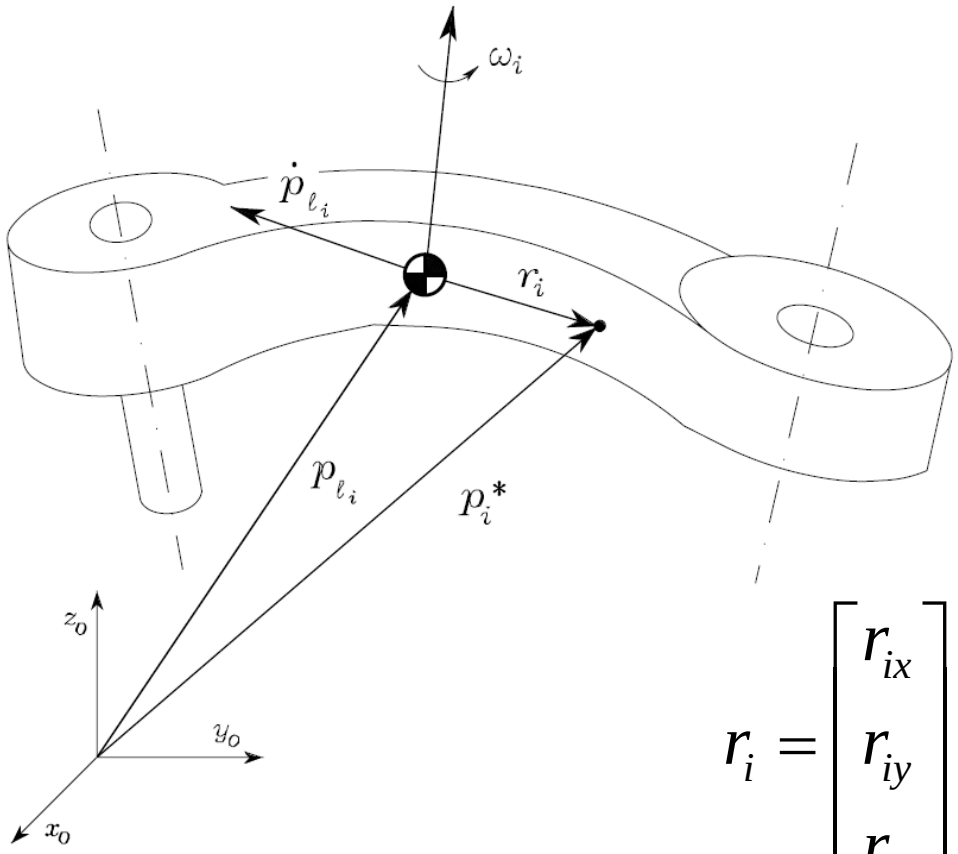
energia cinetica del braccio *i*

energia cinetica del motore che aziona il giunto *i*.

$$T_{\ell_i} = \frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \left[\dot{p}_i^* \right]^T \dot{p}_i^* \rho dV$$

vettore velocità lineare

densità della particella elementare di volume *dV*



Particella elementare

$$r_i = \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ r_{iz} \end{bmatrix} = p_i^* - p_{\ell_i}$$

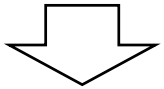
$$p_{\ell_i} = \frac{1}{m_{\ell_i}} \int_{V_{\ell_i}} p_i^* \rho dV$$

baricentro

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \wedge r_{i-1,i}$$ *regola di composizione delle velocità*

$$\dot{p}_i^* = \dot{p}_{\ell_i} + \omega_i \wedge r_i = \dot{p}_{\ell_i} + S(\omega_i) r_i$$

Sostituendo in $$T_{\ell_i} = \frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \left[\dot{p}_i^* \right]^T \dot{p}_i^* \rho dV$$



traslazione $$\frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \left[\dot{p}_{\ell_i} \right]^T \dot{p}_{\ell_i} \rho dV = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \left[\dot{p}_{\ell_i} \right]^T \dot{p}_{\ell_i}$$

mutuo $$2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \left[\dot{p}_{\ell_i} \right]^T S(\omega_i) r_i \rho dV \right\} = 2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\dot{p}_{\ell_i} \right]^T S(\omega_i) \int_{V_{\ell_i}} \left(p_i^* - p_{\ell_i} \right) \rho dV \right\} = 0$$

rotazione $$\frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \left[r_i \right]^T S^T(\omega_i) S(\omega_i) r_i \rho dV = \frac{1}{2} \left[\omega_i \right]^T \left(\int_{V_{\ell_i}} S^T(r_i) S(r_i) \rho dV \right) \omega_i$$

Poiché $S(r_i)=\begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{ix} \\ -r_{iy} & r_{ix} & 0 \end{bmatrix}$ ⟹

Il contributo rotazionale si può esprimere come segue:

$$\frac{1}{2}\int_{V_{\ell i}} [r_i]^T S^T(\omega_i) S(\omega_i) r_i \rho dV = \frac{1}{2}[\omega_i]^T I_{\ell_i} \omega_i$$

$$I_{\ell_i} = \begin{bmatrix} \int (r_{iy}^2 + r_{iz}^2)\rho dV & -\int r_{ix} r_{iy} \rho dV & -\int r_{ix} r_{iz} \rho dV \\ -\int r_{ix} r_{iy} \rho dV & \int (r_{ix}^2 + r_{iz}^2)\rho dV & -\int r_{iy} r_{iz} \rho dV \\ -\int r_{ix} r_{iz} \rho dV & -\int r_{iy} r_{iz} \rho dV & \int (r_{iy}^2 + r_{ix}^2)\rho dV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\ell_i xx} & -I_{\ell_i xy} & -I_{\ell_i xz} \\ -I_{\ell_i xy} & I_{\ell_i yy} & -I_{\ell_i yz} \\ -I_{\ell_i xz} & -I_{\ell_i yz} & I_{\ell_i zz} \end{bmatrix}$$

Tensore d'inerzia relativo al baricentro del braccio *i* espresso in terna base

La posizione del braccio *i* dipende dalla configurazione del manipolatore

$$I_{\ell_i} \Rightarrow \textbf{funzione della configurazione}$$

Se la velocità del braccio *i* viene espressa con riferimento ad una terna solidale al braccio *i* (secondo a convezione di D – H), si ottiene:

$$\omega_i^i = R_i^T \omega_i$$

matrice di rotazione dalla terna solidale al braccio *i* alla terna base

$$I_{\ell_i} = R_i I_{\ell_i}^i R_i^T$$

Tensore espresso con riferimento alla terna *i* (tensore costante)

Se la terna solidale al braccio *i* coincide con la terna centrale (principale) d'inerzia, i prodotti d'inerzia sono nulli e il tensore d'inerzia relativo al baricentro (all'origine della terna) è una matrice diagonale

$$T_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \left[\dot{p}_{\ell_i}\right]^T \dot{p}_{\ell_i} + \frac{1}{2} \left[\omega_i\right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T \omega_i$$

$$\begin{cases} \dot{p}_{\ell_i} = J_{p_1}^{(\ell_i)} \dot{q}_1 + \ldots + J_{p_i}^{(\ell_i)} \dot{q}_i = J_p^{(\ell_i)} \dot{q} \\ \omega_i = J_{0_1}^{(\ell_i)} \dot{q}_1 + \ldots + J_{0_i}^{(\ell_i)} \dot{q}_i = J_0^{(\ell_i)} \dot{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_p^{(\ell_i)} = \left[J_{p_1}^{(\ell_i)} \ldots J_{p_i}^{(\ell_i)} 0 \ldots 0 \right] \\ J_0^{(\ell_i)} = \left[J_{0_1}^{(\ell_i)} \ldots J_{0_i}^{(\ell_i)} 0 \ldots 0 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{p_j}^{(\ell_i)} = \begin{cases} z_{j-1} & \text{per un giunto prismatico} \\ z_{j-1} \wedge \left(\mathrm{p}_{\ell_i} - p_{j-1} \right) & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \\ J_{0_j}^{(\ell_i)} = \begin{cases} 0 & \text{per un giunto prismatico} \\ z_{j-1} & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \end{cases}$$

Energia cinetica del braccio

$$T_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \left[\dot{p}_{\ell_i} \right]^T \dot{p}_{\ell_i} + \frac{1}{2} \left[\omega_i \right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T \omega_i$$

$$\begin{Vmatrix} \dot{p}_{\ell_i} = J_p^{(\ell_i)} \dot{q} \\ \omega_i = J_0^{(\ell_i)} \dot{q} \end{Vmatrix}$$

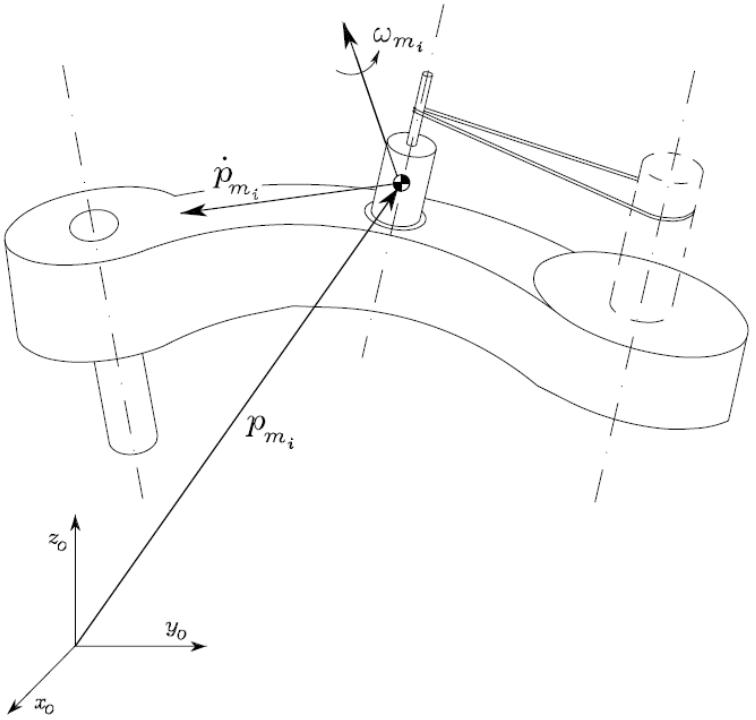
$$T_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{q}^T \left[J_p^{(\ell_i)} \right]^T J_p^{(\ell_i)} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_0^{(\ell_i)} \right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T J_0^{(\ell_i)} \dot{q}$$

Energia cinetica dell'attuatore:

Coppie ai giunti sono fornite dai motori tramite organi di trasmissione meccanica

In alternativa, giunti azionati con motori calettati direttamente sull'asse di rotazione senza organi di trasmissione.

Il motore del giunto i si ritiene posto sul braccio $i-1$ (in modo da alleggerire il carico dinamico dei primi giunti della catena)



$$T_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \left[\dot{p}_{m_i} \right]^T \dot{p}_{m_i} + \frac{1}{2} \left[\omega_{m_i} \right]^T I_{m_i}^i \omega_{m_i}$$

massa del rotore

velocità lineare del baricentro del rotore

tensore d'inerzia del rotore relativo al baricentro

velocità angolare del rotore

$$k_r = \frac{r}{r_m} = \frac{\vartheta_m}{\vartheta} = \frac{\omega_m}{\omega}$$

$$k_{r_i} \dot{q}_i = \dot{\vartheta}_{m_i}$$

velocità angolare del rotore

rapporto di trasmissione meccanica

$$\omega_{m_i} = \omega_{i-1} + k_{r_i} \dot{q}_i z_{m_i}$$

velocità angolare del braccio $i-1$

versore dell'asse del rotore

$$\begin{aligned}\dot{p}_{m_i} &= J_p^{(m_i)}\dot{q}\\ \omega_{m_i} &= J_0^{(m_i)}\dot{q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_p^{(m_i)} &= \left[J_{p_1}^{(m_i)}\ldots J_{p_{i-1}}^{(m_i)}0\ldots0\right]\\ J_0^{(m_i)} &= \left[J_{0_1}^{(m_i)}\ldots J_{0_i}^{(m_i)}0\ldots0\right]\end{aligned}$$

$$J_{p_j}^{(m_i)} = \begin{cases} z_{j-1} & \text{per un giunto prismatico}\\ z_{j-1}\wedge\left(\mathrm{p}_{m_i}-p_{j-1}\right) & \text{per un giunto rotoidale}\end{cases}$$

$$J_{0_j}^{(m_i)} = \begin{cases} J_{0_j}^{(\ell_i)} & \mathrm{j}=1,2,\ldots\mathrm{i}\text{-}1\\ k_{r_i}\mathrm{z}_{m_i} & \mathrm{j}=\mathrm{i}\end{cases}$$

$$T_{m_i} = \frac{1}{2}m_{m_i}\dot{q}^T\left[J_p^{(m_i)}\right]^T J_p^{(m_i)}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[J_0^{(m_i)}\right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}\dot{q}$$

$$T_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{q}^T \left[J_p^{(\ell_i)} \right]^T J_p^{(\ell_i)} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_0^{(\ell_i)} \right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T J_0^{(\ell_i)} \dot{q}$$

$$T_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{q}^T \left[J_p^{(m_i)} \right]^T J_p^{(m_i)} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[J_0^{(m_i)} \right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)} \dot{q}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left(T_{\ell_i} + T_{m_i} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}$$

$$B(q) = \sum_{i=1}^{n} \left(m_{\ell_i} \left[J_p^{(\ell_i)} \right]^T J_p^{(\ell_i)} + \left[J_0^{(\ell_i)} \right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T J_p^{(\ell_i)} + m_{m_i} \left[J_p^{(m_i)} \right]^T J_p^{(m_i)} + \left[J_0^{(m_i)} \right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)} \right)$$

$$B(q)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_{\ell_i}\left[J_p^{(\ell_i)}\right]^T J_p^{(\ell_i)}+\left[J_0^{(\ell_i)}\right]^T R_i I_{\ell_i}^{i} R_i^T J_p^{(\ell_i)}+m_{m_i}\left[J_p^{(m_i)}\right]^T J_p^{(m_i)}+\left[J_0^{(m_i)}\right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$$

$B(q)$ è la **matrice d'inerzia** (n x n) che risulta:

- Simmetrica
- Definita positiva
- Dipendente dalla configurazione

Determinazione dell'energia potenziale

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left(U_{\ell_i} + U_{m_i} \right)$$

Energia potenziale del braccio i

Energia potenziale del motore che aziona il braccio i

$$U_{\ell_i} = -\int_{V_{\ell_i}} [g_0]^T p_i^* \rho dV = -m_{\ell_i} [g_0]^T p_{\ell_i}$$

vettore accelerazione gravitazionale riferito alla terna base
(ad esempio $g_0 = [0, 0, -g]^T$ se l'asse *z* è quello verticale)

$$U_{m_i} = -m_{m_i} \left[g_0 \right]^T p_{m_i}$$

$$U = -\sum_{i=1}^{n} \left(m_{\ell_i} \left[g_0 \right]^T p_{\ell_i} + m_{m_i} \left[g_0 \right]^T p_{m_i} \right)$$

Funzione delle sole variabili di giunto

Equazioni del moto

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q,\dot{q})$$

In forma matriciale:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^T = \boldsymbol{\zeta}$$

$$\Rightarrow \quad B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = \boldsymbol{\zeta}$$

$$n(q,\dot{q}) = \dot{B}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T B(q)\dot{q})\right]^T + \left[\frac{\partial U(q)}{\partial q}\right]^T$$

Equazioni del moto

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\left(m_{\ell_i}\left[g_0\right]^T p_{\ell_i}(q) + m_{m_i}\left[g_0\right]^T p_{m_i}(q)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \zeta_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{jk}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_{\ell_j}\left[g_0\right]^T\frac{\partial p_{\ell_j}}{\partial q_i} + m_{m_j}\left[g_0\right]^T\frac{\partial p_{m_j}}{\partial q_i}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_{jk}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{n}\left(m_{\ell_j}\left[g_0\right]^T j_{p_i}^{(\ell_j)}(q) + m_{m_j}\left[g_0\right]^T j_{p_i}^{(m_j)}(q)\right)$$

Posto $g_i(q) = -\sum_{j=1}^{n} \left(m_{\ell_j} [g_0]^T j_{p_i}^{(\ell_j)}(q) + m_{m_j} [g_0]^T j_{p_i}^{(m_j)}(q) \right)$ contributo gravitazionale

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{jk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q) \dot{q}_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{d b_{ij}(q)}{dt} \dot{q}_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

Equazioni del moto

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(q) \right) = \zeta_i$$

Posto $h_{ijk} = \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(q) = \zeta_i$$

Interpretazione fisica

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(q) = \zeta_i$$

Termini di accelerazione

- b_{ii} rappresenta il momento d'inerzia visto dall'asse del giunto *i*, nella configurazione corrente del manipolatore, quando gli altri giunti sono bloccati
- il coefficiente b_{ij} tiene conto dell'effetto dell'accelerazione del giunti *j* sul giunto *i*.

Termini quadrati in velocità

$h_{ijj}\dot{q}_j^2$

- rappresenta l'effetto centrifugo indotto al giunto *i* dalla velocità del giunto *j*

$h_{iii} = 0$ poiché $\frac{\partial b_{ii}}{\partial q_i} = 0$

$h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k$

- rappresenta l'effetto di Coriolis indotto al giunto *i* dalle velocità dei giunti *j* e *k*

Termini dipendenti solo dalla configurazione

$g_i(q)$ rappresenta le coppie generate all'asse del giunto *i* nella configurazione corrente del manipolatore per effetto della gravità

Forze non conservative

Forze n.c. che compiono lavoro

Coppie di attuazione ai giunti τ

Coppie di attrito viscoso $F_v \dot{q}$

Coppie di attrito statico

$$f(q, \dot{q})$$

$$f_s = F_s \operatorname{sgn}(\dot{q})$$

Coppie di attuazione a bilanciamento di forze di contatto esterne $J^T(q)h$

Modello dinamico nello spazio dei giunti

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h$$

C è una matrice scelta in modo tale da soddisfare :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j$$

La scelta della matrice C non è univoca

Proprietà notevoli delle equazioni della dinamica

Antisimmetria della matrice $\dot{B} - 2C$

Una possibile scelta per la matrice C

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j$$

Di conseguenza :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_k$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right)$$

Simboli di Christoffel del primo tipo

$$N(q,\dot{q}) = \dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})$$

Tale scelta genera una matrice antisimmetrica $N(q,\dot{q})$

In particolare : $\dot{q}^T N(q,\dot{q})\dot{q} = 0$ **Per qualunque scelta della matrice *C***

Si può dimostrare che tale relazione è una diretta conseguenza del principio di conservazione dell'energia (La derivata totale dell'energia cinetica bilancia la potenza generata da tutte le forze agenti ai giunti del manipolatore)

Linearità nei parametri dinamici

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau$$

$$\tau = Y(q,\dot{q},\ddot{q})\pi \qquad \pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix}$$

baricentro del braccio *tensore d'inerzia rispetto al baricentro*

$$\pi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i \ell_{C_i x} & m_i \ell_{C_i y} & m_i \ell_{C_i z} & \hat{I}_{ixx} & \hat{I}_{ixy} & \hat{I}_{ixz} & \hat{I}_{iyy} & \hat{I}_{iyz} & \hat{I}_{izz} & I_{m_i} \end{bmatrix}^T$$

massa complessiva del braccio *momento d'inerzia del rotore*

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s\,\mathrm{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h$$

a_i *lunghezza del braccio* i

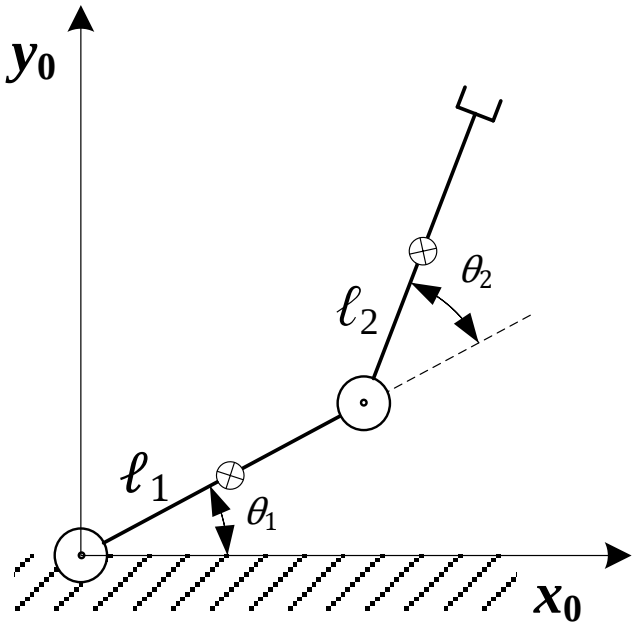
ℓ_i *distanza del baricentro del braccio* i *dal giunto* i

m_{ℓ_i} *massa del braccio* i

m_{m_i} *massa del rotore del motore* i

I_{ℓ_i} *momento di inerzia del braccio* i *relativo al baricentro intorno a* z_0

I_{m_i} *momento di inerzia del rotore* i *intorno all'asse*



Si assume che i due motori siano sugli assi dei giunti, con baricentro in corrispondenza delle origini delle rispettive terne

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_{\ell_i}\left[J_p^{(\ell_i)}\right]^T J_p^{(\ell_i)}+\left[J_0^{(\ell_i)}\right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T J_p^{(\ell_i)}+m_{m_i}\left[J_p^{(m_i)}\right]^T J_p^{(m_i)}+\left[J_0^{(m_i)}\right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}\right)$$

$$\dot{p}_{\ell_i}=J_P^{(\ell i)}\dot{q}=\begin{bmatrix} j_{P_1}^{(\ell i)} & j_{P_2}^{(\ell i)} & \cdots & j_{P_i}^{(\ell i)} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\dot{q}$$

$$\omega_i=J_O^{(\ell i)}\dot{q}=\begin{bmatrix} j_{O_1}^{(\ell i)} & j_{O_2}^{(\ell i)} & \cdots & j_{O_i}^{(\ell i)} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\dot{q}$$

$$\begin{cases} j_{P_j}^{(\ell i)}=z_{j-1}\wedge\left(p_{\ell_i}-p_{j-1}\right)\\ j_{O_j}^{(\ell i)}=z_{j-1}\end{cases}$$

$$\begin{cases} J_P^{(\ell_1)}=\begin{bmatrix} j_{P_1}^{(\ell_1)} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_0\wedge\left(p_{\ell_1}-p_0\right) & 0\end{bmatrix}\\ J_O^{(\ell_1)}=\begin{bmatrix} j_{O_1}^{(\ell_1)} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_0 & 0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases} J_P^{(\ell_2)}=\begin{bmatrix} j_{P_1}^{(\ell_2)} & j_{P_2}^{(\ell_2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_0\wedge\left(p_{\ell_2}-p_0\right) & z_1\wedge\left(p_{\ell_2}-p_1\right)\end{bmatrix}\\ J_O^{(\ell_2)}=\begin{bmatrix} j_{O_1}^{(\ell_2)} & j_{O_2}^{(\ell_2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_0 & z_1\end{bmatrix}\end{cases}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$p_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix}a_1c_1\\a_1s_1\\0\end{bmatrix} \quad p_{\ell_1} = \begin{bmatrix}\ell_1c_1\\\ell_1s_1\\0\end{bmatrix} \quad p_{\ell_2} = \begin{bmatrix}a_1c_1+\ell_2c_{12}\\a_1s_1+\ell_2s_{12}\\0\end{bmatrix} \quad z_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$P \equiv (P_x, P_y, P_z)$$
$$Q \equiv (Q_x, Q_y, Q_z)$$

$$P \wedge Q = \begin{bmatrix}Q_yP_z - Q_zP_y\\Q_zP_x - Q_xP_z\\Q_xP_y - Q_yP_x\end{bmatrix}$$

prodotto vettoriale tra due vettori

$$z_0 \wedge (p_{\ell_1} - p_0) = \begin{bmatrix}-\ell_1s_1\\\ell_1c_1\\0\end{bmatrix}$$

$$z_0 \wedge (p_{\ell_2} - p_0) = \begin{bmatrix}-a_1s_1 - \ell_2s_{12}\\a_1c_1 + \ell_2c_{12}\\0\end{bmatrix} \qquad z_1 \wedge (p_{\ell_2} - p_1) = \begin{bmatrix}-\ell_2s_{12}\\\ell_2c_{12}\\0\end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$J_P^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p_{\ell_1} - p_0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 & 0 \\ \ell_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p_{\ell_2} - p_0) & z_1 \wedge (p_{\ell_2} - p_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - \ell_2 s_{12} & -\ell_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$J_P^{(m_1)} = [0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(m_1)} = [k_{r1} z_{m_1} \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(m_2)} = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p_{m_2} - p_0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_O^{(m_2)} = \begin{bmatrix} j_{O_1}^{(\ell_2)} & k_{r2} z_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & k_{r2} \end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_{\ell_i}\left[J_p^{(\ell_i)}\right]^T J_p^{(\ell_i)}+\left[J_0^{(\ell_i)}\right]^T R_i I_{\ell_i}^{i} R_i^T J_p^{(\ell_i)}+m_{m_i}\left[J_p^{(m_i)}\right]^T J_p^{(m_i)}+\left[J_0^{(m_i)}\right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}\right)$$

$$\left[J_P^{(\ell_1)}\right]^T J_P^{(\ell_1)}=\begin{bmatrix}\ell_1^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[J_P^{(\ell_2)}\right]^T J_P^{(\ell_2)}=\begin{bmatrix}-a_1s_1-\ell_2s_{12} & a_1c_1+\ell_2c_{12} & 0\\ -\ell_2s_{12} & \ell_2c_{12} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a_1s_1-\ell_2s_{12} & -\ell_2s_{12}\\ a_1c_1+\ell_2c_{12} & \ell_2c_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_1^2+\ell_2^2+2a_1\ell_2c_2 & \ell_2a_1c_2\\ \ell_2a_1c_2 & \ell_2^2\end{bmatrix}$$

$$\left[J_P^{(m_1)}\right]^T J_P^{(m_1)}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[J_P^{(m_2)}\right]^T J_P^{(m_2)}=\begin{bmatrix}-a_1s_1 & a_1c_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a_1s_1 & 0\\ a_1c_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1^2s_1^2+a_1^2c_1^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_{\ell_i}\left[J_p^{(\ell_i)}\right]^T J_p^{(\ell_i)}+\left[J_0^{(\ell_i)}\right]^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T J_p^{(\ell_i)}+m_{m_i}\left[J_p^{(m_i)}\right]^T J_p^{(m_i)}+\left[J_0^{(m_i)}\right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}\right)$$

$$I_{\ell_i}=\begin{bmatrix} I_{\ell_i xx} & -I_{\ell_i xy} & -I_{\ell_i xz} \\ -I_{\ell_i xy} & I_{\ell_i xx} & -I_{\ell_i yz} \\ -I_{\ell_i xz} & -I_{\ell_i yz} & I_{\ell_i zz} \end{bmatrix}$$

$$\left[J_O^{(\ell_1)}\right]^T I_{\ell_1} J_O^{(\ell_1)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{\ell_1 xx} & -I_{\ell_1 xy} & -I_{\ell_1 xz} \\ -I_{\ell_1 xy} & I_{\ell_1 xx} & -I_{\ell_1 yz} \\ -I_{\ell_1 xz} & -I_{\ell_1 yz} & I_{\ell_1 zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{\ell_1 zz} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[J_O^{(\ell_2)}\right]^T I_{\ell_2} J_O^{(\ell_2)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{\ell_2 xx} & -I_{\ell_2 xy} & -I_{\ell_2 xz} \\ -I_{\ell_2 xy} & I_{\ell_2 xx} & -I_{\ell_2 yz} \\ -I_{\ell_2 xz} & -I_{\ell_2 yz} & I_{\ell_2 zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{\ell_2 zz} & I_{\ell_2 zz} \\ I_{\ell_2 zz} & I_{\ell_2 zz}\end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_{\ell_i}\left[J_p^{(\ell_i)}\right]^T J_p^{(\ell_i)}+\left[J_0^{(\ell_i)}\right]^T R_i I_{\ell_i}^{i} R_i^T J_p^{(\ell_i)}+m_{m_i}\left[J_p^{(m_i)}\right]^T J_p^{(m_i)}+\left[J_0^{(m_i)}\right]^T R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}\right)$$

$$I_{m_i}^{m_i}=\begin{bmatrix} I_{m_i xx}^{m_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_i yy}^{m_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_i zz}^{m_i} \end{bmatrix} \qquad R_{m_1}=\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{m_2}=\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[J_O^{(m_1)}\right]^T R_{m_1} I_{m_1}^{m_1} R_{m_1}^T J_O^{(m_1)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{r1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1 zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{r1}^2 I_{m_1 zz} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[J_O^{(m_2)}\right]^T R_{m_2} I_{m_2}^{m_2} R_{m_2}^T J_O^{(m_2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_{r2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_2 zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & k_{r2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{m_2 zz} & k_{r2} I_{m_2 zz} \\ k_{r2} I_{m_2 zz} & k_{r2}^2 I_{m_2 zz} \end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q) & b_{12}(q) \\ b_{21}(q) & b_{12}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(\theta_2) & b_{12}(\theta_2) \\ b_{21}(\theta_2) & b_{12}(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2}a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_k \qquad c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}\right) \qquad c_{ijk} = c_{ikj}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2}a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}$$

$$c_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0 \qquad c_{112} = c_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2 = h$$

$$c_{122} = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = h \qquad c_{211} = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -h$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0 \qquad c_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_k$$

$c_{111} = 0$	$c_{112} = c_{121} = h$	$c_{122} = h$
$c_{211} = -h$	$c_{212} = 0$	$c_{222} = 0$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{\theta}_2 & h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -h\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$g_i(q) = -\sum_{j=1}^{n}\left[m_{\ell_j} g_0^T J_{p_i}^{(\ell_j)}(q) + m_{m_j} g_0^T J_{p_i}^{(m_j)}(q)\right] \qquad g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 & 0 \\ \ell_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_P^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - \ell_2 s_{12} & -\ell_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_P^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_P^{(m_2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = \left(m_{\ell_1}\ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1\right) g c_1 + m_{\ell_2}\ell_2 g c_{12}$$

$$g_2 = m_{\ell_2}\ell_2 g c_{12}$$

Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s\,\mathrm{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h$$

$$\begin{cases} \left[I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2}a_1^2\right]\ddot{\theta}_1 + \\ \quad + \left[I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2}I_{m_2}\right]\ddot{\theta}_2 - 2m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2\dot{\theta}_2^2 + \\ \quad + \left(m_{\ell_1}\ell_1 + m_{m_2}a_1 + m_{\ell_2}a_1\right)g c_1 + m_{\ell_2}\ell_2 g c_{12} = \tau_1 \\ \\ \left[I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2}I_{m_2}\right]\ddot{\theta}_1 + \left(I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}\right)\ddot{\theta}_2 + \\ \quad + m_{\ell_2}a_1\ell_2 s_2\dot{\theta}_1^2 + m_{\ell_2}\ell_2 g c_{12} = \tau_2 \end{cases}$$

Modello Dinamico nello Spazio Operativo

- Si vogliono descrivere le **equazioni del moto direttamente nello spazio operativo**, legando le forze generalizzate agenti sul manipolatore e l'insieme minimo di variabili che descrivono posizione e orientamento dell'organo terminale nello spazio operativo
- La caratterizzazione con la lagrangiana nello spazio operativo non consente di trattare con manipolatori *ridondanti*, in quanto le variabili non costituiscono un set di *coordinate generalizzate*
- Non è infatti possibile descrivere in questo caso i moti interni della struttura provocati da un insieme di forze generalizzate ai giunti il cui effetto sul moto dell'organo terminale sia nullo

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s\,\mathrm{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h$$

Trascurando le forze di attrito ai giunti $\Rightarrow$

$$\ddot{q} = -B^{-1}(q)C(q,\dot{q})\dot{q} - B^{-1}(q)g(q) + B^{-1}(q)\left(\tau - J^T(q)h\right)$$

$$\tau = J^T(q)\gamma \Rightarrow$$

$$\ddot{q} = -B^{-1}(q)C(q,\dot{q})\dot{q} - B^{-1}(q)g(q) + B^{-1}(q)J^T(q)\left(\gamma - h\right)$$

$$\dot{x} = J_A(q)\dot{q}$$

$$\ddot{x} = J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}$$

$$\ddot{x} = -J_A(q)B^{-1}(q)C(q,\dot{q})\dot{q} - J_A(q)B^{-1}(q)g(q) + J_A(q)B^{-1}(q)J^T(q)\left(\gamma - h\right) + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}$$

Legame tra Jacobiano analitico e geometrico

$$J = T_A(\phi)J_A \quad \Longrightarrow \quad J^T = J_A^T T_A^T$$

$$\ddot{x} = -J_A(q)B^{-1}(q)C(q,\dot{q})\dot{q} - J_A(q)B^{-1}(q)g(q) + J_A(q)B^{-1}(q)J_A^T(q)T_A^T\left(\gamma - h\right) + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}$$

Ponendo: $T_A^T\gamma = \gamma_A \qquad T_A^T h = h_A \quad \Longrightarrow$

$$\ddot{x} = -J_A(q)B^{-1}(q)C(q,\dot{q})\dot{q} - J_A(q)B^{-1}(q)g(q) + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q} + J_A(q)B^{-1}(q)J_A^T(q)\left(\gamma_A - h_A\right)$$

Si pone:

$$\begin{cases} B_A = \left(J_A B^{-1} J_A^T\right)^{-1} \\ C_A\dot{x} = B_A J_A B^{-1} C\dot{q} - B_A\dot{J}_A\dot{q} \\ g_A = B_A J_A B^{-1} g \end{cases}$$

Modello Dinamico nello Spazio Operativo

$$B_A\ddot{x} = -B_A J_A B^{-1} C\dot{q} - B_A J_A B^{-1} g + B_A \dot{J}_A \dot{q} + B_A J_A B^{-1} J_A^T \left(\gamma_A - h_A\right)$$

$$\Rightarrow \quad B_A\ddot{x} = -C_A\dot{x} - g_A + \gamma_A - h_A \quad \Rightarrow$$

$$B_A(x)\ddot{x} + C_A(x,\dot{x})\dot{x} + g_A(x) = \gamma_A - h_A$$

Osservazioni

- Il modello è formalmente analogo a quello nello spazio dei giunti
- Come nello studio della cinematica differenziale, nel caso di singolarità non è possibile effettuare l'inversa dello jacobiano e quindi la trattazione necessita di particolari accorgimenti
- Il modello è valido anche per manipolatori ridondanti, benché le variabili x non costituiscano un insieme di *coordinate generalizzate*
- In questo caso la matrice B_A caratterizza una *pseudo-energia cinetica*

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

- Dinamica diretta: determinare le accelerazioni all'organo terminale assegnando le coppie ai giunti e le forze/coppie applicate all'organo terminale. Per un manipolatore ridondante il modello dinamico nello s.o. non è direttamente utilizzabile in quanto $\tau = J^T(q)\gamma$ ha soluzioni in γ solo se $\tau \in \mathrm{Im}(J^T)$
- In modelli di simulazione, si lavora nello spazio dei giunti per poi ottenere le variabili dello s.o. tramite la cinematica diretta

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

- Dinamica Inversa: determinare le coppie ai giunti necessarie alla generazione di un moto specifico assegnato (in termini di posizione, velocità, accelerazione dell'organo terminale)
- Si può invertire la cinematica e lavorare successivamente nello spazio dei giunti (calcolo delle coppie mediante modello dinamico nello spazio dei giunti)
- In alternativa si può usare il modello nello s.o. per calcolare le γ_A e poi calcolare le τ tramite trasposta dello Jacobiano.
- Con tali tecniche la *ridondanza non viene sfruttata*, in quanto le coppie calcolate *non generano moti interni* per la struttura

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

E' possibile risolvere la ridondanza a livello dinamico

Ricordando

$$\left\| \begin{array}{l} B_A = \left(J_A B^{-1} J_A^T \right)^{-1} \\ C_A \dot{x} = B_A J_A B^{-1} C \dot{q} - B_A \dot{J}_A \dot{q} \\ g_A = B_A J_A B^{-1} g \end{array} \right.$$

Il modello nello spazio operativo

$$B_A \ddot{x} = -B_A J_A B^{-1} C \dot{q} - B_A J_A B^{-1} g + B_A \dot{J}_A \dot{q} + B_A J_A B^{-1} J_A^T \left(\gamma_A - h_A \right)$$

può essere scritto come

$$B_A (\ddot{x} - \dot{J}_A \dot{q}) + B_A J_A B^{-1} C \dot{q} + B_A J_A B^{-1} g = \gamma_A - h_A$$

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

$$B_A(\ddot{x} - \dot{J}_A\dot{q}) + B_A J_A B^{-1} C\dot{q} + B_A J_A B^{-1} g = \gamma_A - h_A$$

Sappiamo che $\ddot{x} = J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}$

$$B_A J_A \ddot{q} + B_A J_A B^{-1} C\dot{q} + B_A J_A B^{-1} g = \gamma_A - h_A$$

Poniamo $\bar{J}_A(q) = B^{-1}(q) J_A^T(q) B_A(q)$

$$\bar{J}_A^T(B\ddot{q} + C\dot{q} + g) = \gamma_A - h_A$$

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

$$\bar{J}_A^T(B\ddot{q}+C\dot{q}+g)=\gamma_A-h_A$$

Modello dinamico nello spazio dei giunti

$$\bar{J}_A^T(\tau-J_A^T h_A)=\gamma_A-h_A$$

Da cui

$$\bar{J}_A^T\tau=\gamma_A$$

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

$$\bar{J}_A^T \tau = \gamma_A$$

La soluzione in τ di questa equazione è

$$\tau = J_A^T(q)\gamma_A + (I - J_A^T(q)\bar{J}_A^T)\tau_a$$

Dinamica Diretta e Inversa nello Spazio Operativo

$$\tau = J_A^T(q)\gamma_A + (I - J_A^T(q)\bar{J}_A^T)\tau_a$$

- **Tale soluzione si ottiene tenendo conto del fatto che J_A^T è una *pseudo-inversa destra* di $\bar{J}_A^T$ pesata secondo la matrice B^{-1}**

- **Il vettore τ_a non dà contributo di forza all'organo terminale, ma genera moti interni della struttura da impiegare per la gestione della ridondanza a livello dinamico**