# Controllo dei Robot

## Controllo del moto

***Paolo Lino***

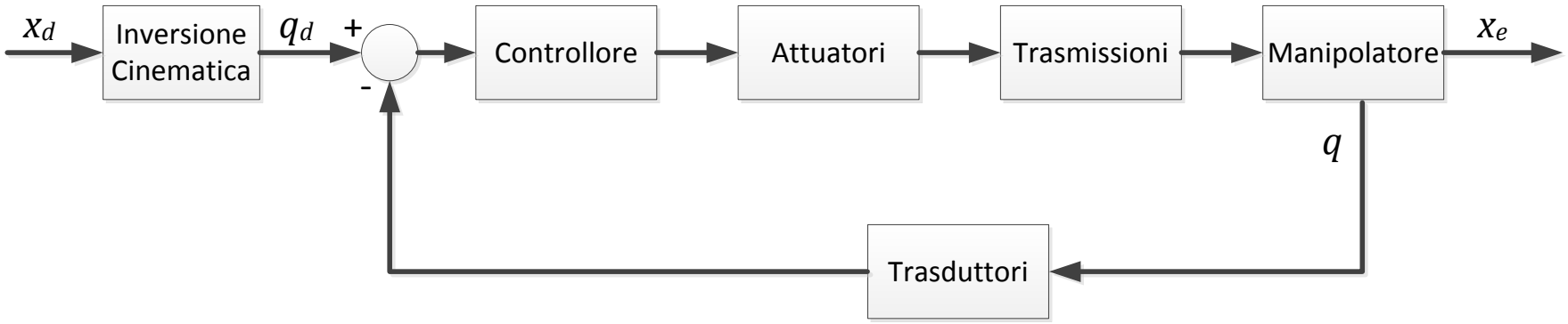
*Dipartimento di Ing. Elettrica e dell'Informazione (DEI)*

*Politecnico di Bari*

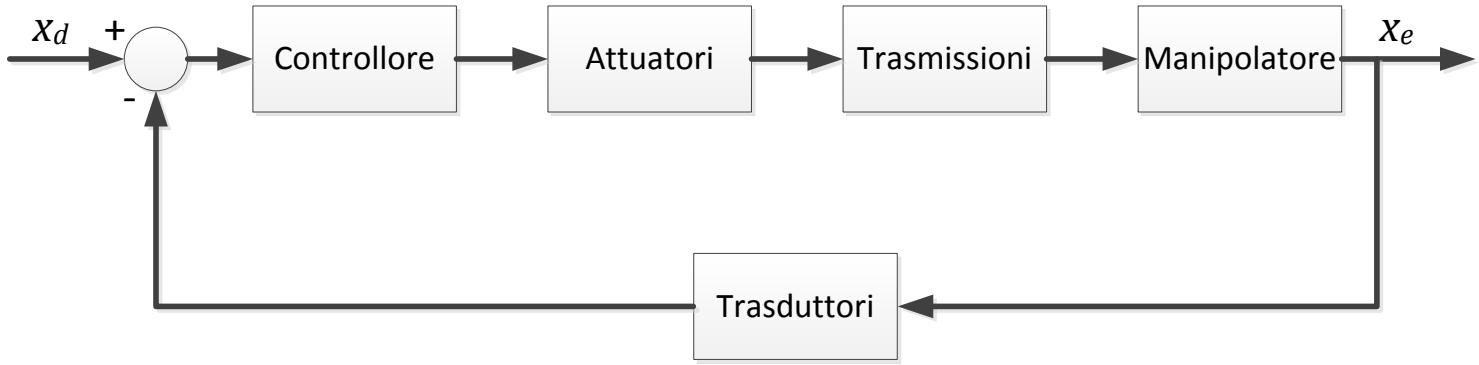
*e-mail: paolo.lino [at] poliba.it*

# Controllo del moto

## Controllo nello spazio dei giunti




## Controllo nello spazio operativo



# Controllo decentralizzato

Manipolatore: $$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau$$

Organi di trasmissione :

$$\begin{cases} K_r q = q_m \\ \tau_m = K_r^{-1}\tau \end{cases}$$

Azionamenti elettrici:

$$\begin{cases} K_r^{-1}\tau = K_t i_a \\ v_a = R_a i_a + K_v \dot{q}_m \\ v_a = G_v v_c \end{cases}$$

# Controllo nello spazio dei giunti

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau$$

Determinare le $n$ componenti di forza generalizzate tali che risulti :

$$q(t) = q_d(t)$$

A causa degli organi di trasmissione :

$$K_r q = q_m \qquad \tau_m = K_r^{-1}\tau$$

$$B(q) = \bar{B} + \Delta B(q)$$

*matrice diagonale e costante*

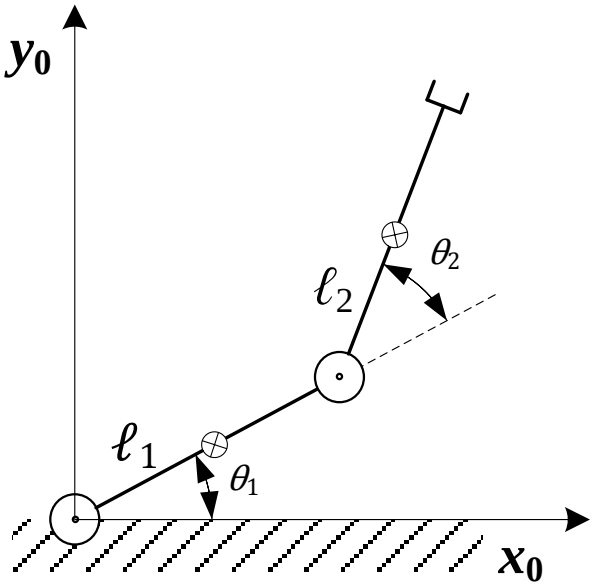
# Esempio: Manipolatore planare a due bracci

$$B(q) = \begin{bmatrix} b_{11}(q) & b_{12}(q) \\ b_{21}(q) & b_{22}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(\theta_2) & b_{12}(\theta_2) \\ b_{21}(\theta_2) & b_{22}(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2}a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}$$



# Controllo nello spazio dei giunti

Sostituendo otteniamo :

$$\tau_m = K_r^{-1}\bar{B}K_r^{-1}\ddot{q}_m + F_m\dot{q}_m + d$$

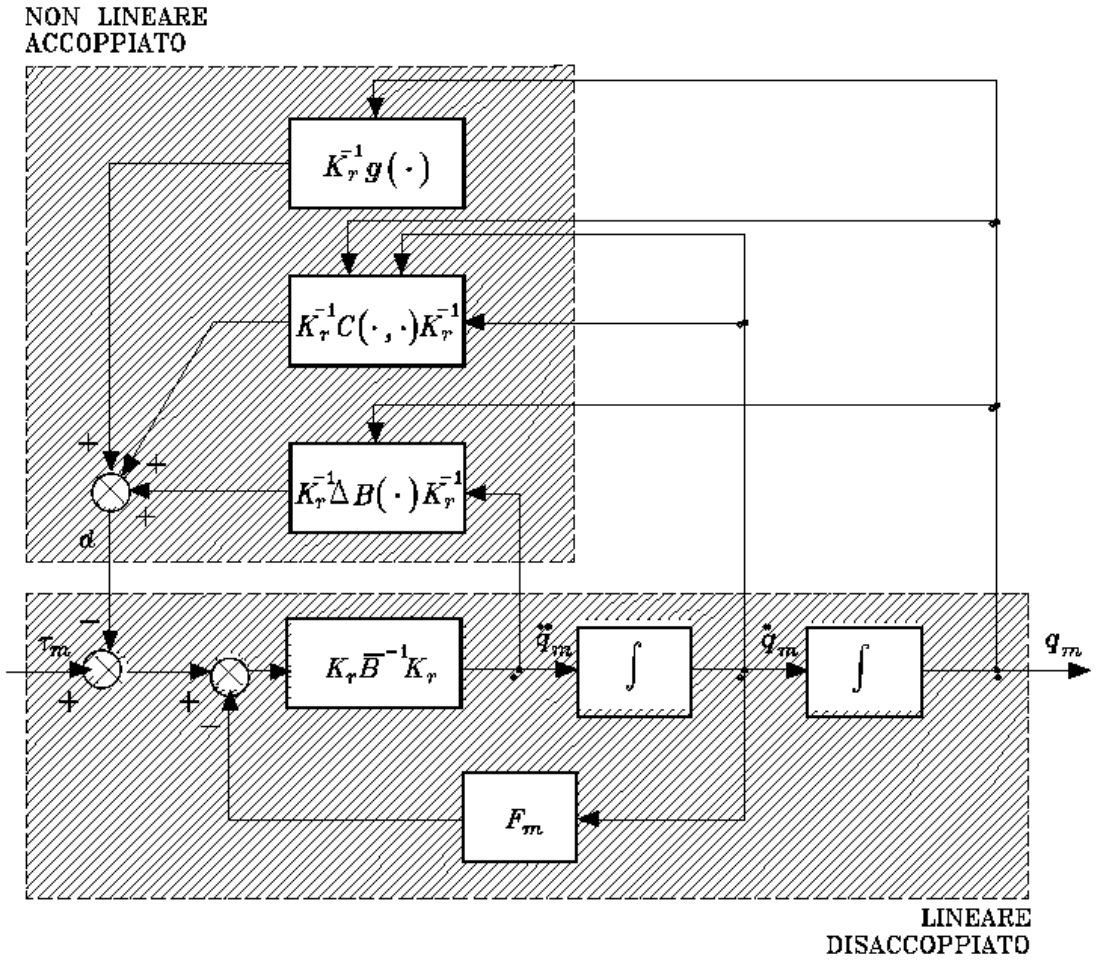
*Coefficienti di attrito viscoso riportati all'asse del motore*

$$F_m = K_r^{-1}F_vK_r^{-1}$$

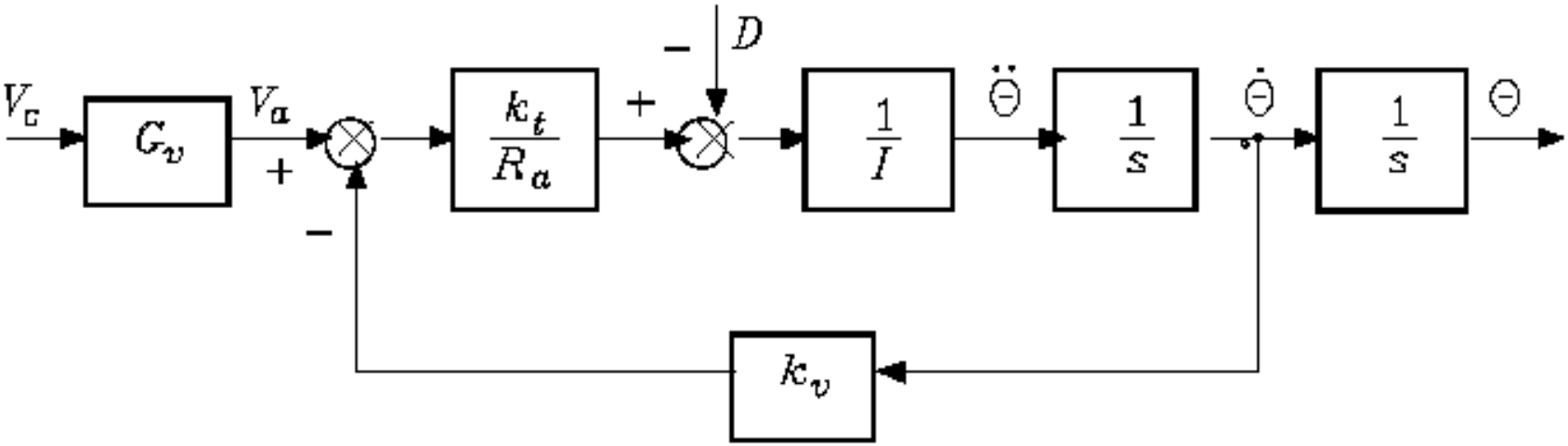
*Contributo delle forze generalizzate dipendente dalla configurazione*

$$d = K_r^{-1}\Delta B(q)K_r^{-1}\ddot{q}_m + K_r^{-1}C(q,\dot{q})K_r^{-1}\dot{q}_m + K_r^{-1}g(q)$$

# Controllo del moto



# Controllo indipendente ai giunti



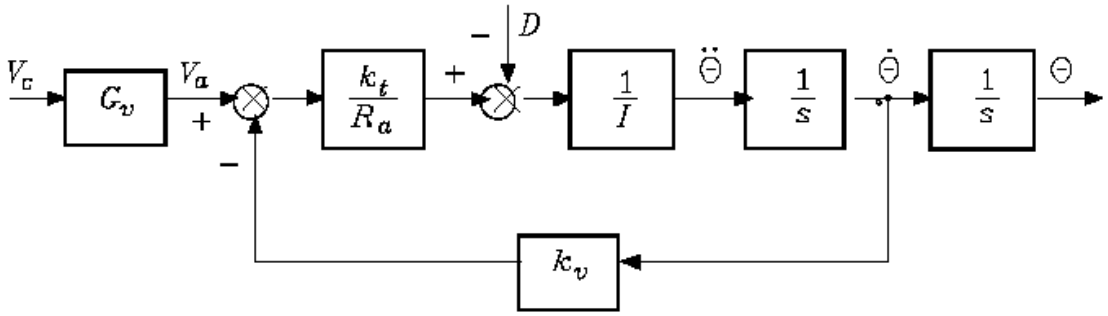

$$\frac{L_a}{R_a} \ll \frac{I}{F_m}$$

*Costante di tempo elettrica trascurabile rispetto alla costante di tempo meccanica*

$$F_m \ll \frac{k_v k_t}{R_a}$$

*Coefficiente d'attrito viscoso trascurabile rispetto al coefficiente d'attrito elettrico*

# Controllo indipendente ai giunti



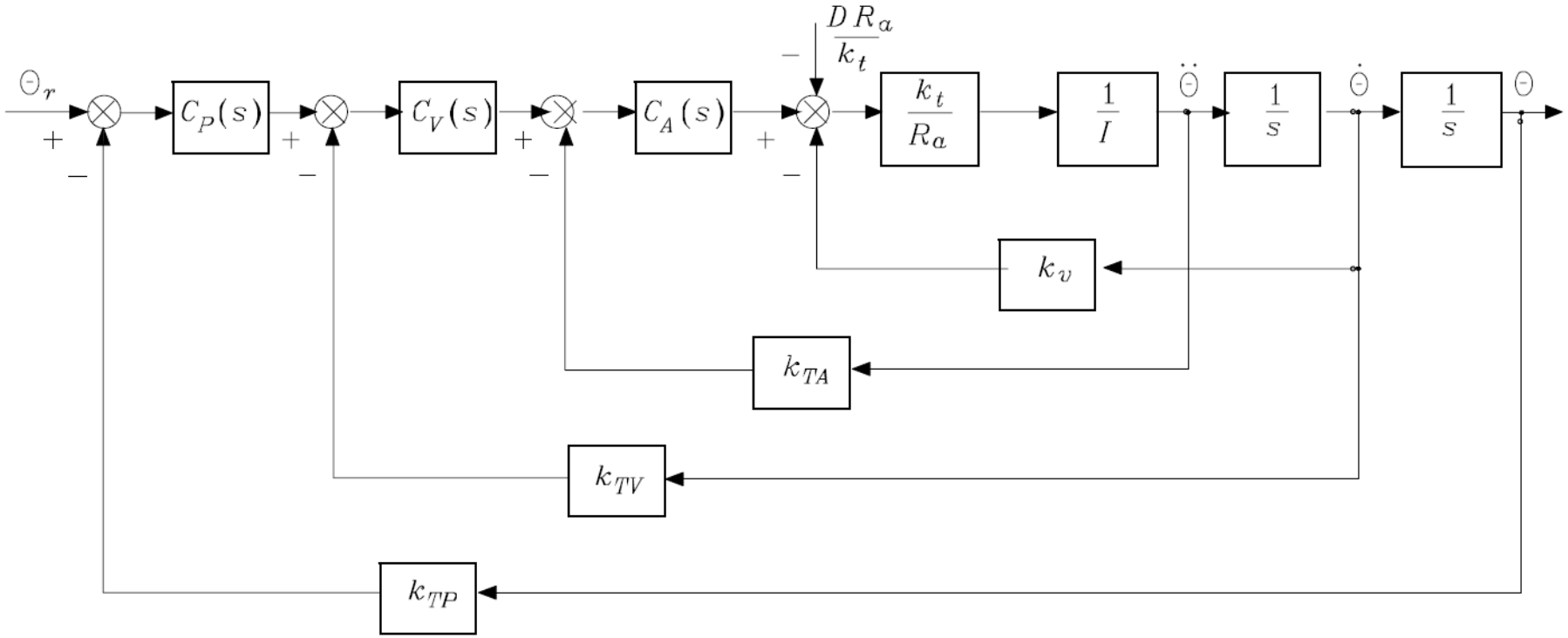

$$M(s) = \frac{\frac{k_t}{R_a I s}}{1 + k_v \frac{k_t}{R_a I s}} \frac{1}{s} = \frac{\frac{k_t}{R_a I s}}{k_v \frac{k_t}{R_a I s}\left(\frac{R_a I}{k_t k_v} s + 1\right)} \frac{1}{s} = \frac{1}{k_v} \frac{1}{s\left(1 + \frac{R_a I}{k_t k_v} s\right)}$$

$$M(s) = \frac{k_m}{s(1 + T_m s)}$$

$$k_m = \frac{1}{k_v}$$ *costante di guadagno velocità – tensione*

$$T_m = \frac{R_a I}{k_t k_v}$$ *costante di tempo caratteristica del motore*

# Controllo in retroazione



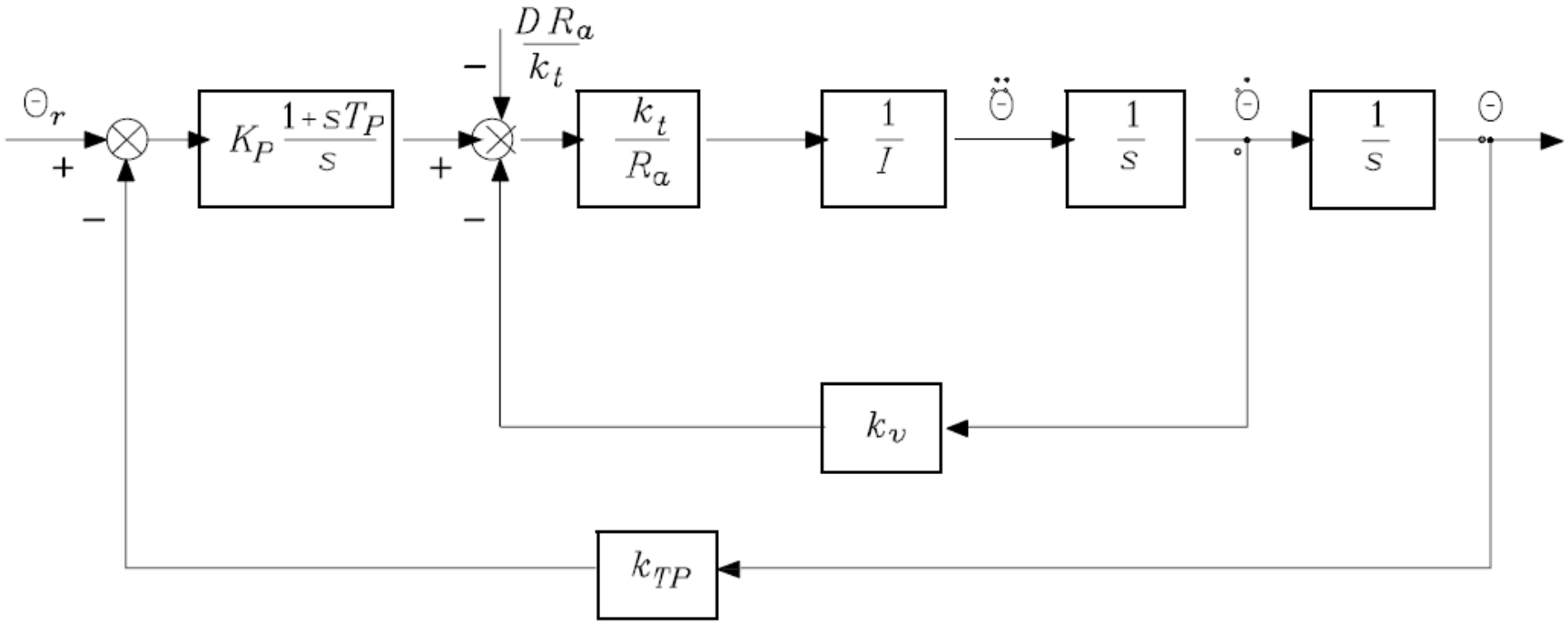
# Controllo in retroazione

Un'efficiente riduzione degli effetti del disturbo $d$ sull'uscita $\Theta$ è assicurata da:

- Un elevato guadagno degli amplificatori a monte del punto d'applicazione del disturbo;
- La presenza, nel controllore, di un'azione integrale al fine di annullare, a regime ($\Theta$ costante), l'effetto della componente gravitazionale sull'uscita.

$$C(s) = K_c \frac{(1 + sT_c)}{s}$$

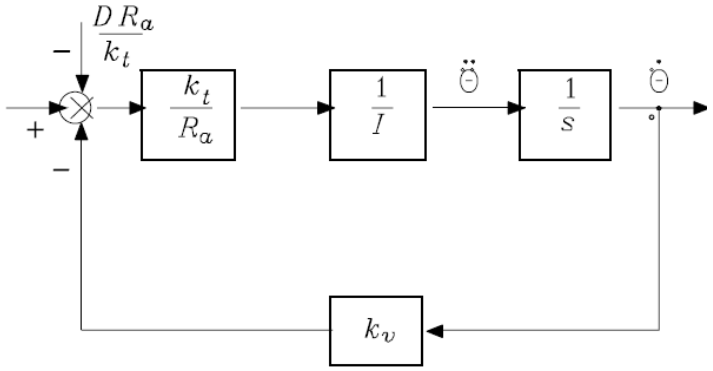
# Retroazione di posizione




$$C_P(s) = K_P \frac{(1+sT_P)}{s}$$

$$C_V = 1$$
$$C_A = 1$$
$$k_{TV} = k_{TA} = 0$$

# Retroazione di posizione




$$F(s) = \frac{\frac{k_t}{R_a I s}}{1 + k_v \frac{k_t}{R_a I s}} = \frac{1}{k_v} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_a I}{k_t k_v} s\right)} = \frac{k_m}{1 + T_m s}$$

*Blocco interno*

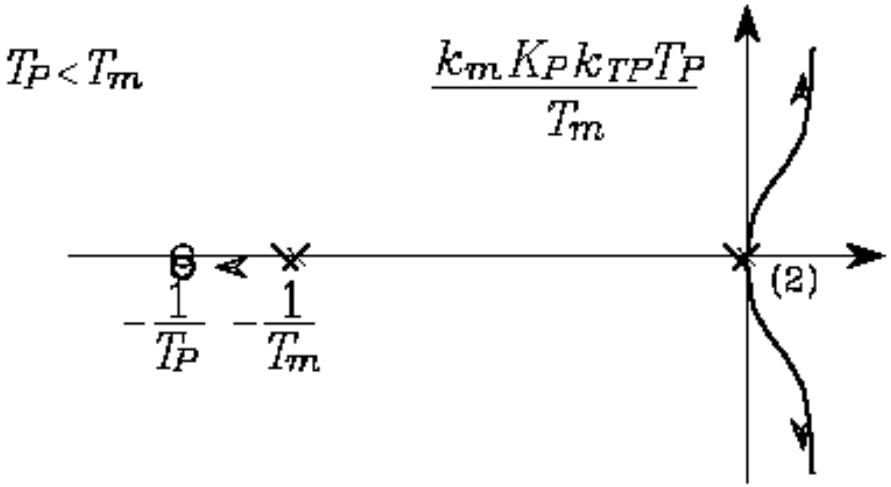
$$P(s) = K_P \frac{(1 + sT_P)}{s} \frac{k_m}{s(1 + T_m s)} = \frac{k_m K_P (1 + sT_P)}{s^2 (1 + T_m s)}$$

*Ramo di azione diretta*

$$H(s) = k_{TP}$$

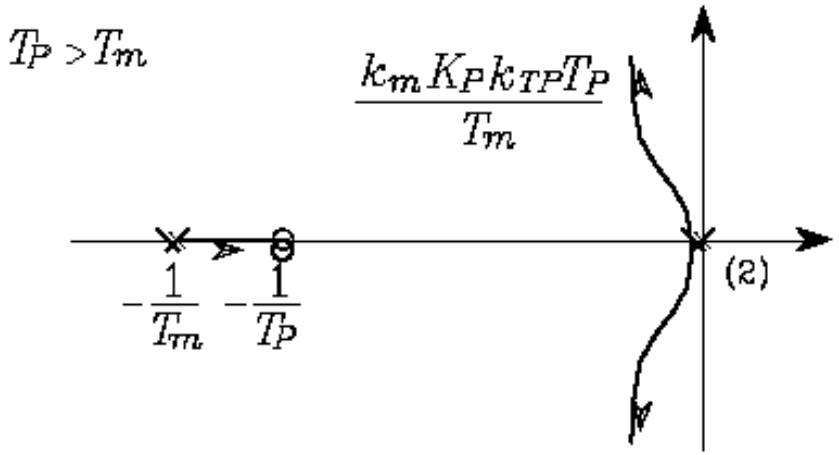
*Ramo di retroazione*

# Retroazione di posizione



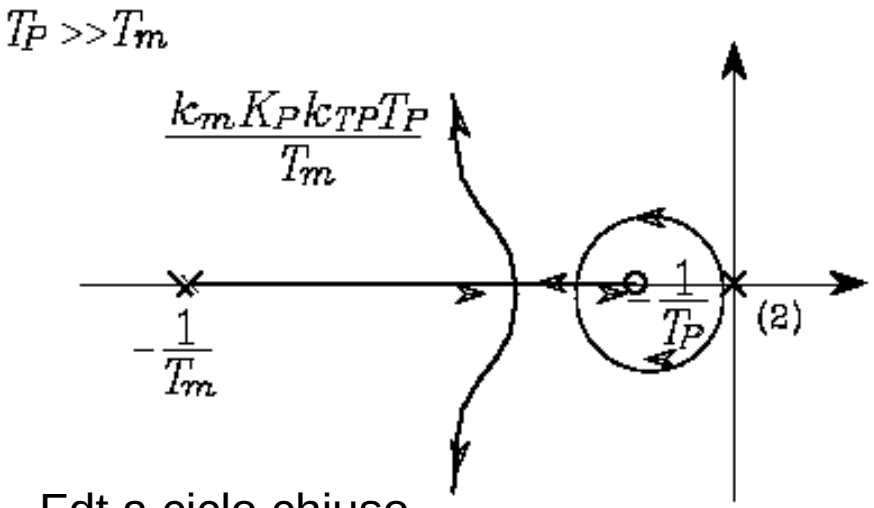

sistema intrinsecamente instabile

$$H(s)P(s) = \frac{k_{TP} k_m K_P (1 + sT_P)}{s^2 (1 + T_m s)}$$




sistema stabile

# Retroazione di posizione




il sistema migliora notevolmente le sue caratteristiche di prontezza

$$H(s)P(s) = \frac{k_{TP} k_m K_P (1 + sT_P)}{s^2(1 + T_m s)}$$

Fdt a ciclo chiuso

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{s^2(1 + sT_m)}{k_m K_P k_{TP}(1 + sT_P)}} \Rightarrow W(s) = \frac{\frac{1}{k_{TP}}(1 + sT_P)}{\left(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)(1 + s\tau)}$$

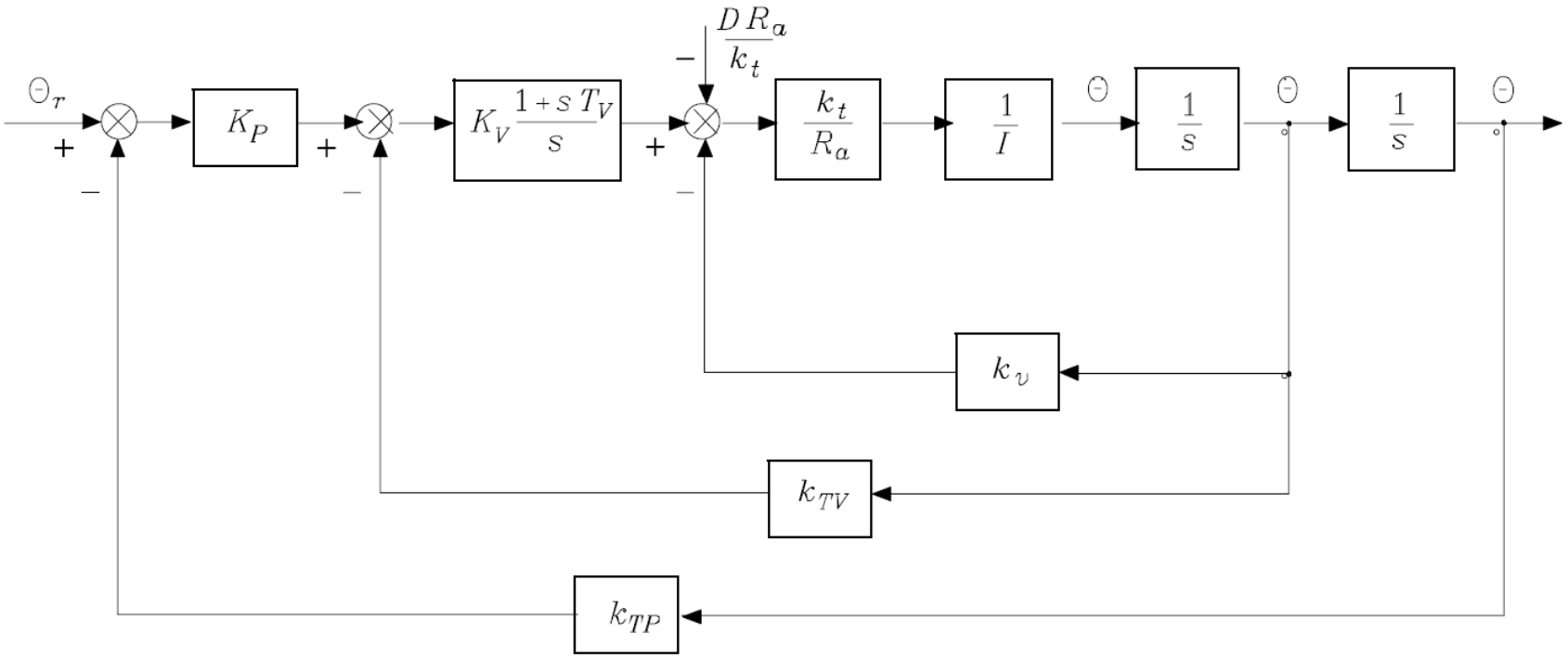
# Retroazione di posizione

$$\frac{\Theta(s)}{D(s)} = \frac{\dfrac{sR_a}{k_t K_P k_{TP}(1+sT_P)}}{1+\dfrac{s^2(1+sT_m)}{k_m K_P k_{TP}(1+sT_P)}}$$

*fdt disturbo-uscita*

- Conviene aumentare $K_P$ in modo da ridurre l'influenza del disturbo sull'uscita durante il transitorio.
- Conviene tuttavia scegliere $K_P$ con valori non molto elevati, per evitare che al sistema di controllo siano assegnate caratteristiche di risonanza poco accettabili.
- Lo zero all'origine dovuto al controllore PI consente di annullare, quando $\theta$ è costante, gli effetti della gravità sulla posizione.

# Retroazione di posizione e velocità




$$C_V(s) = K_V \frac{(1+sT_V)}{s}$$

$$C_P = K_P$$
$$C_A = 1$$
$$k_{TA} = 0$$

# Retroazione di posizione e velocità

Riportando l'anello di retroazione in velocità in parallelo all'anello di retroazione in posizione:

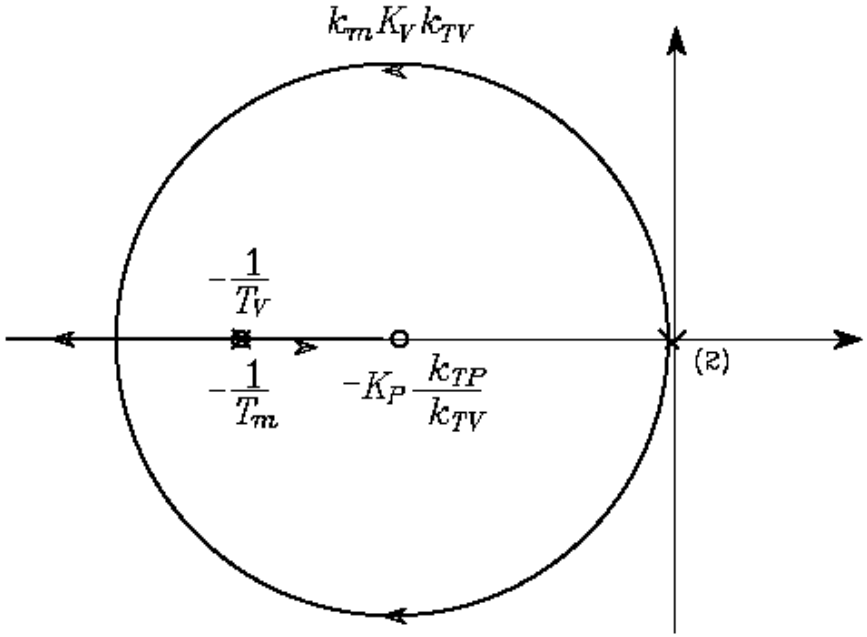
$$P(s) = \frac{k_m K_P K_V (1 + sT_V)}{s^2 (1 + T_m s)}$$ *Ramo di azione diretta*

$$H(s) = k_{TP} \left( 1 + s \frac{K_{TV}}{K_P K_{TP}} \right)$$ *Ramo di retroazione*

Ponendo $T_V = T_m$ lo zero del controllore cancella gli effetti del polo reale del motore

$$\Rightarrow \quad P(s) = \frac{k_m K_P K_V}{s^2}$$

# Retroazione di posizione e velocità




$$P(s) = \frac{k_m K_P K_V}{s^2}$$

$$H(s) = k_{TP}\left(1 + s\frac{K_{TV}}{K_P K_{TP}}\right)$$

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{K_{TV}}{K_P k_{TP}}s + \frac{1}{k_m K_P k_{TP} K_V}s^2}$$

$$\frac{\Theta(s)}{D(s)} = \frac{\frac{sR_a}{k_t K_P k_{TP} K_V (1 + sT_m)}}{1 + \frac{K_{TV}}{K_P k_{TP}}s + \frac{1}{k_m K_P k_{TP} K_V}s^2}$$

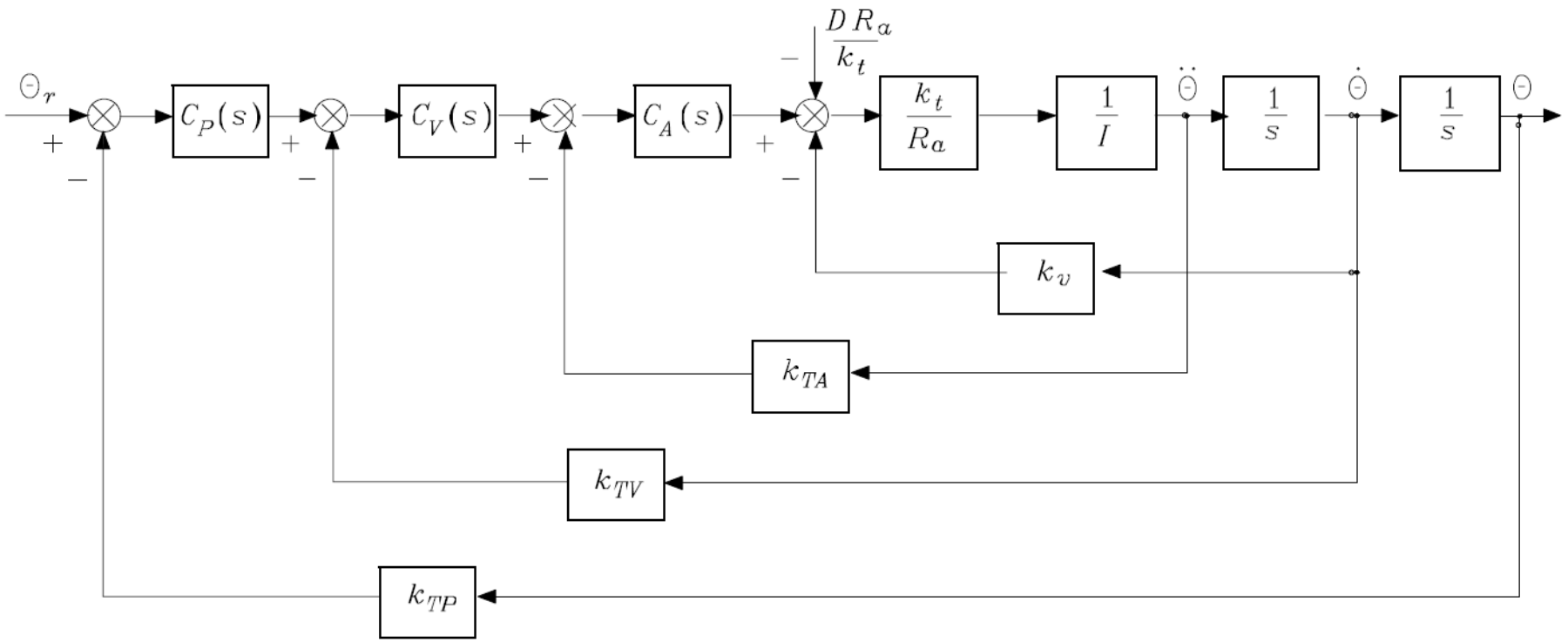
# Retroazione di posizione e velocità

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{k_{TV}}{K_P k_{TP}} s + \frac{1}{k_m K_P k_{TP} K_V} s^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

$$\begin{cases} K_V k_{TV} = \dfrac{2\zeta\omega_n}{k_m} \\ K_P k_{TP} K_V = \dfrac{\omega_n^2}{k_m} \end{cases}$$

Fissate le costanti di trasduzione $k_{TP}$ e $k_{TV}$, si trova $K_V$ dalla prima equazione, e quindi $K_P$ dalla seconda equazione

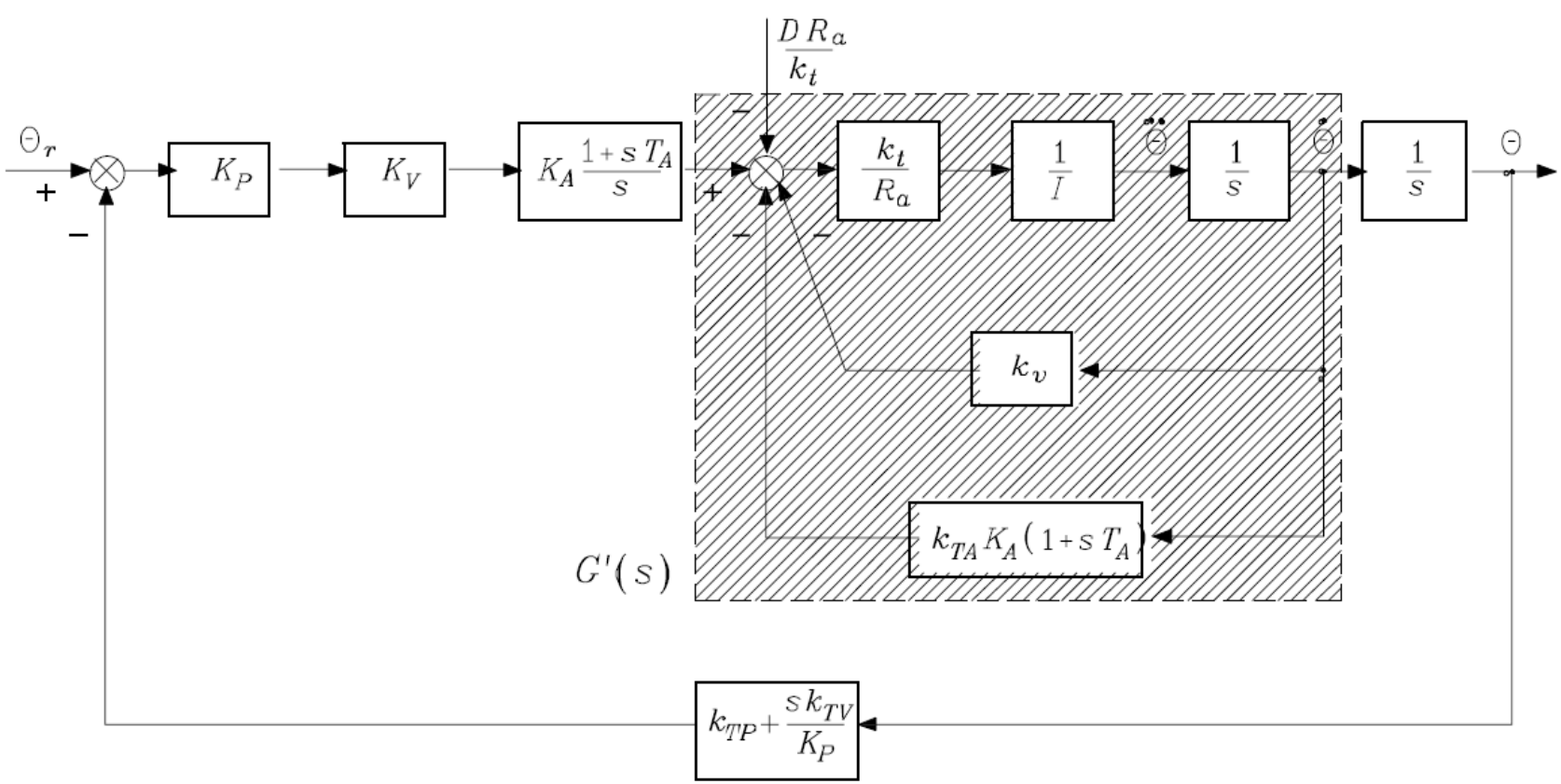
# Retroazione di posizione, velocità e accelerazione




$$C_A(s) = K_A \frac{(1 + sT_A)}{s}$$

$$C_P = K_P$$
$$C_V = K_V$$

# Retroazione di posizione, velocità e accelerazione




$$C_A(s) = K_A \frac{(1 + sT_A)}{s}$$

$$C_P = K_P$$

$$C_V = K_V$$

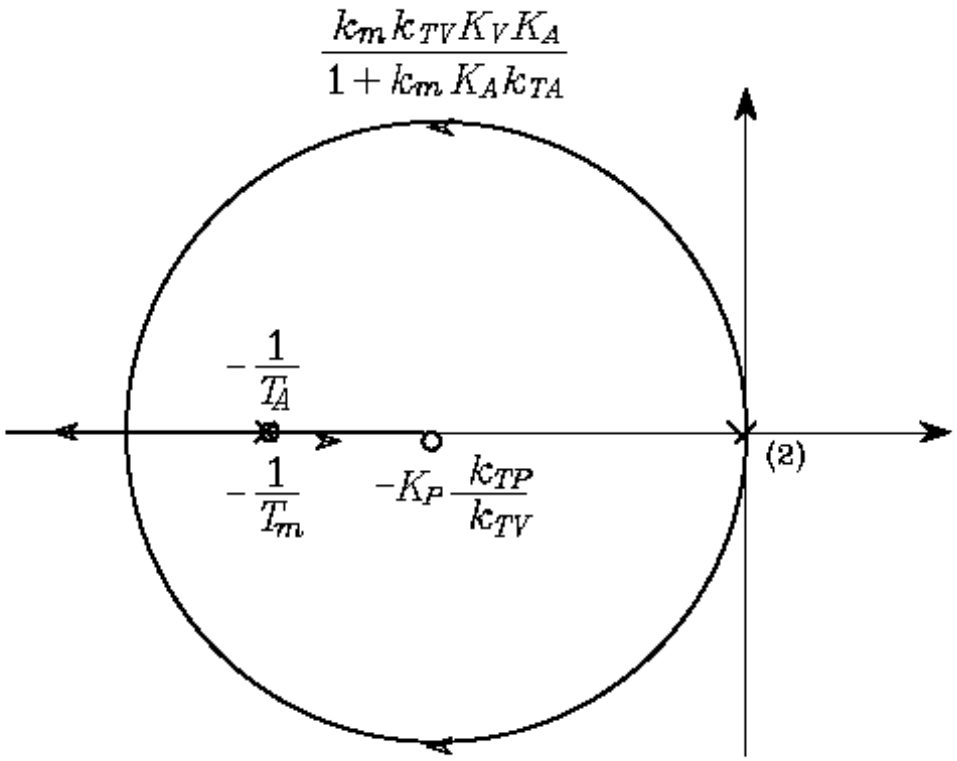
# Retroazione di posizione, velocità e accelerazione

$$G'(s) = \frac{k_m}{(1 + k_m K_A k_{TA})\left[1 + \frac{sT_m\left(1 + k_m K_A k_{TA}\frac{T_A}{T_m}\right)}{1 + k_m K_A k_{TA}}\right]}$$

$$P(s) = \frac{K_P K_V K_A (1 + sT_A)}{s^2} G'(s)$$ *Ramo di azione diretta*

$$H(s) = k_{TP}\left(1 + s\frac{K_{TV}}{K_P K_{TP}}\right)$$ *Ramo di retroazione*

# Retroazione di posizione, velocità e accelerazione




$$P(s) = \frac{K_P K_V K_A (1 + sT_A)}{s^2} G'(s)$$

$$H(s) = k_{TP} \left( 1 + s \frac{K_{TV}}{K_P K_{TP}} \right)$$

Scelta dello zero :

$$T_A = T_m$$

Oppure : $k_m K_A k_{TA} T_A \gg 1$

$k_m K_A k_{TA} \gg 1$

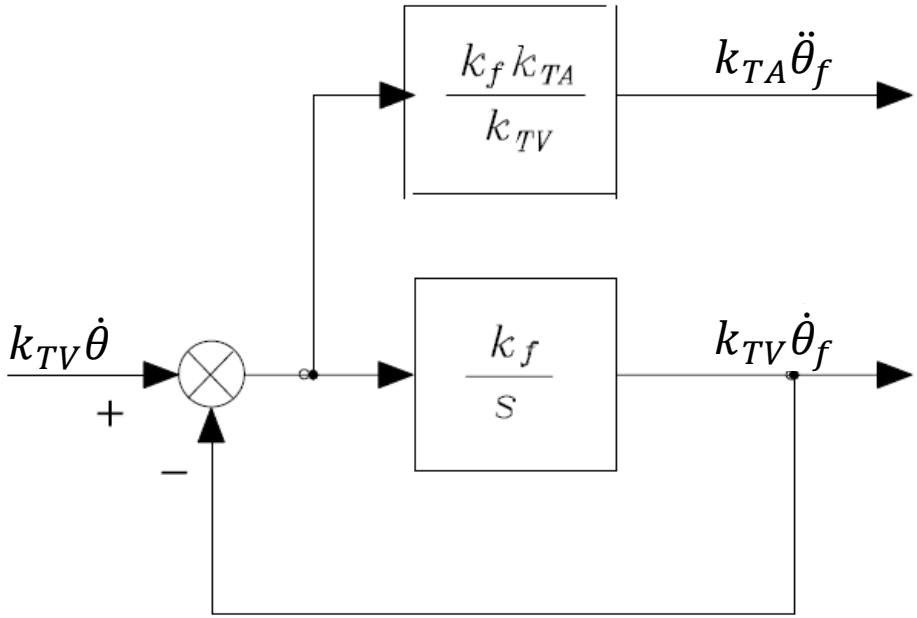
# Retroazione di posizione, velocità e accelerazione

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{k_{TV}}{k_{TP}K_P}s + \frac{1 + k_m K_A k_{TA}}{k_m k_{TP} K_P K_V K_A}s^2}$$

$$\frac{\Theta(s)}{D(s)} = \frac{\frac{sR_a}{k_t k_{TP} K_P K_V K_A (1 + sT_A)}}{1 + \frac{k_{TV}}{k_{TP}K_P}s + \frac{1 + k_m K_A k_{TA}}{k_m k_{TP} K_P K_V K_A}s^2}$$

In questo caso le specifiche e il fattore di riduzione degli effetti indotti dal disturbo possono essere fissati indipendentemente.

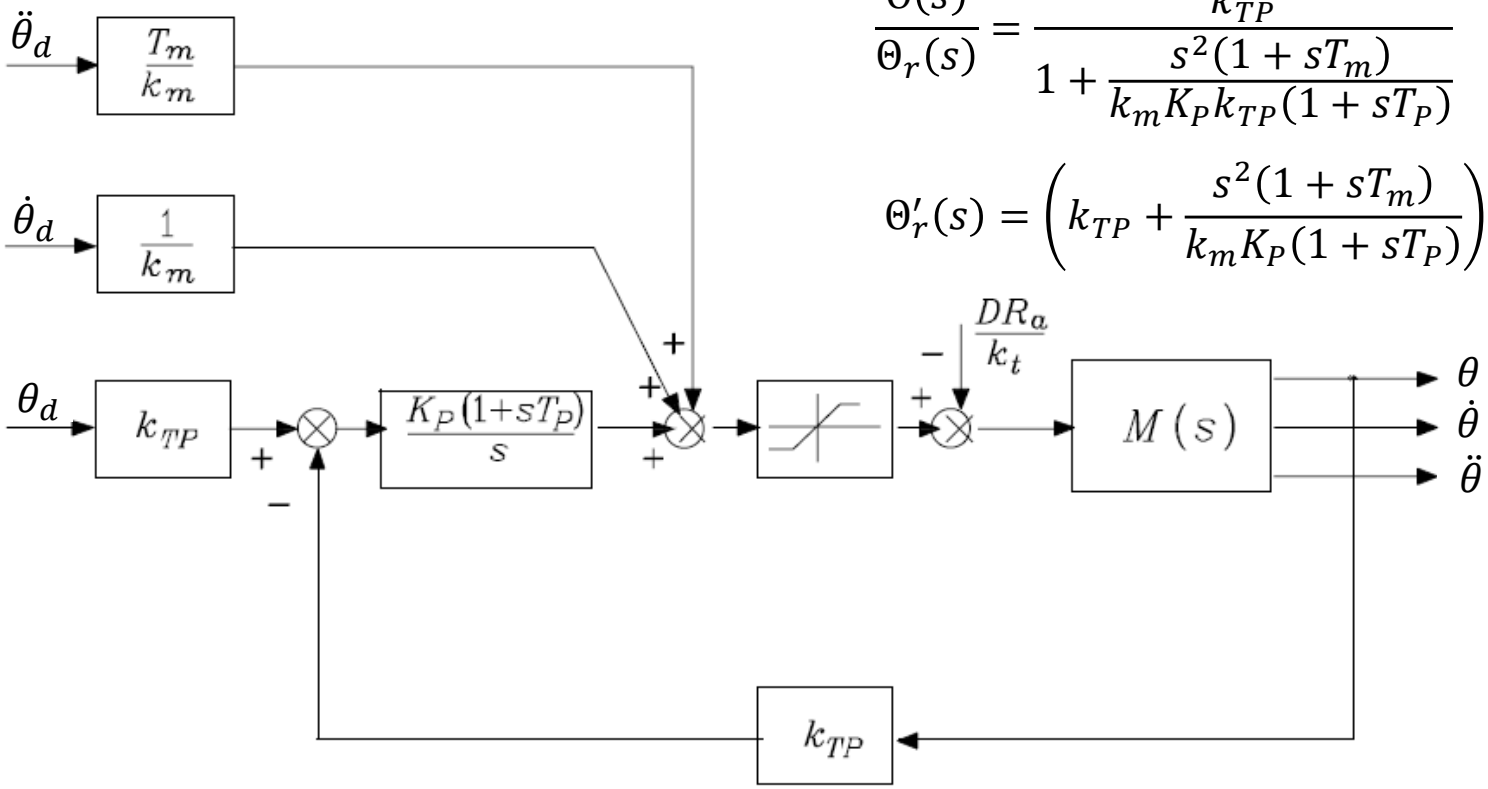
# Stima dell'accelerazione



# Compensazione in avanti decentralizzata

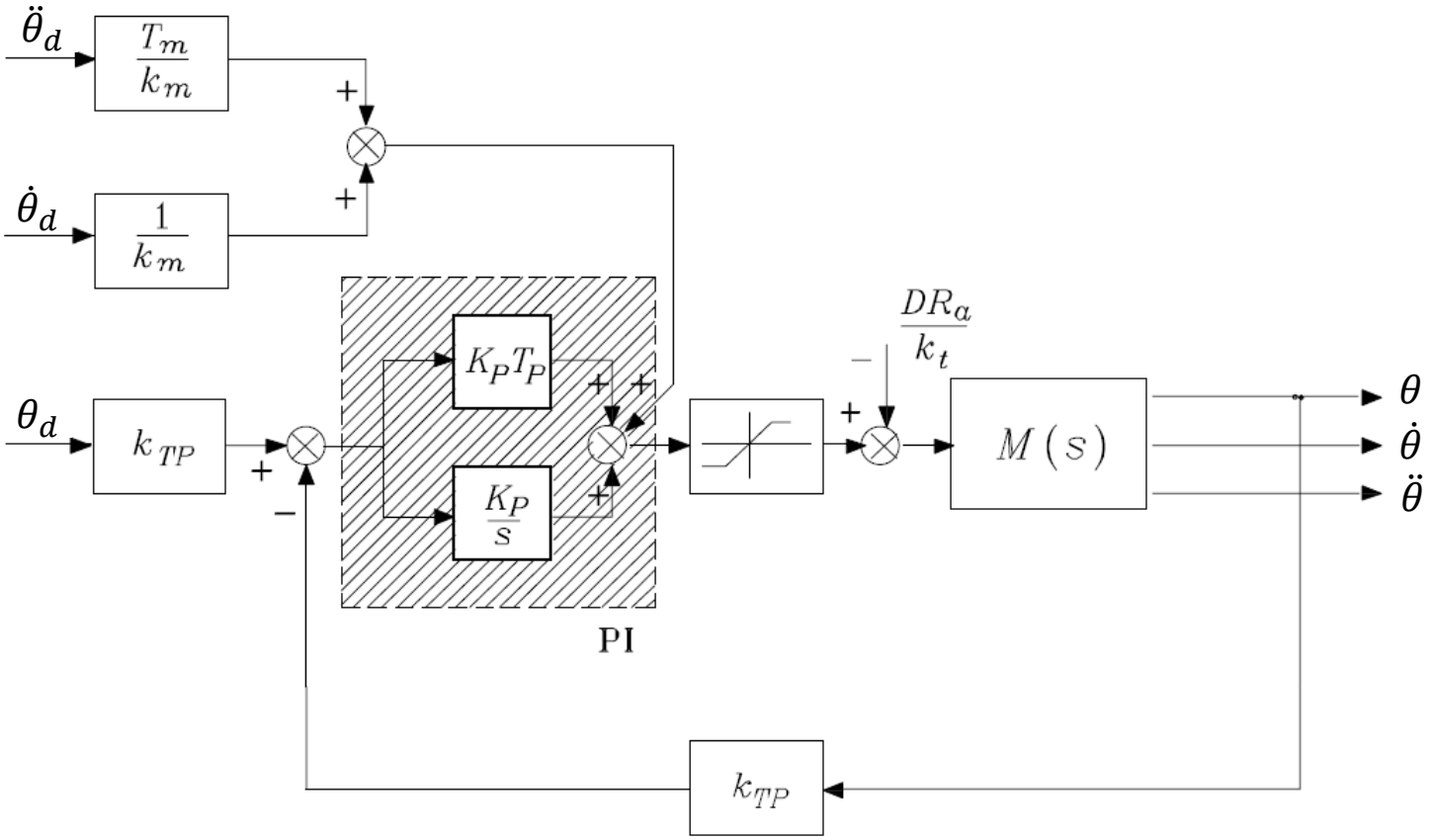
$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{s^2(1+sT_m)}{k_m K_P k_{TP}(1+sT_P)}}$$

$$\Theta'_r(s) = \left(k_{TP} + \frac{s^2(1+sT_m)}{k_m K_P (1+sT_P)}\right)\Theta_d(s)$$




Schema di controllo con retroazione di posizione e compensazione in avanti decentralizzata

# Compensazione in avanti decentralizzata

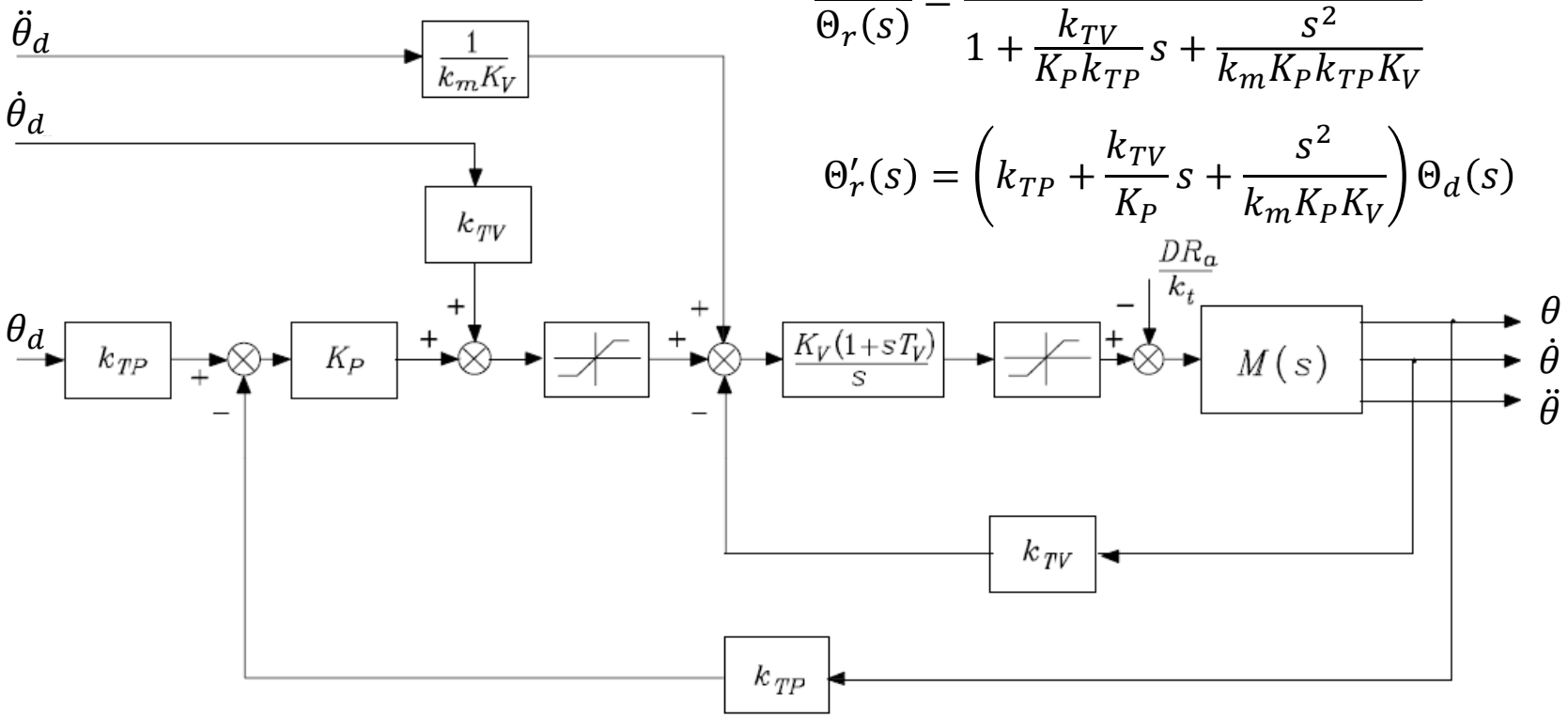



Schema di controllo equivalente di tipo PI

# Compensazione in avanti decentralizzata

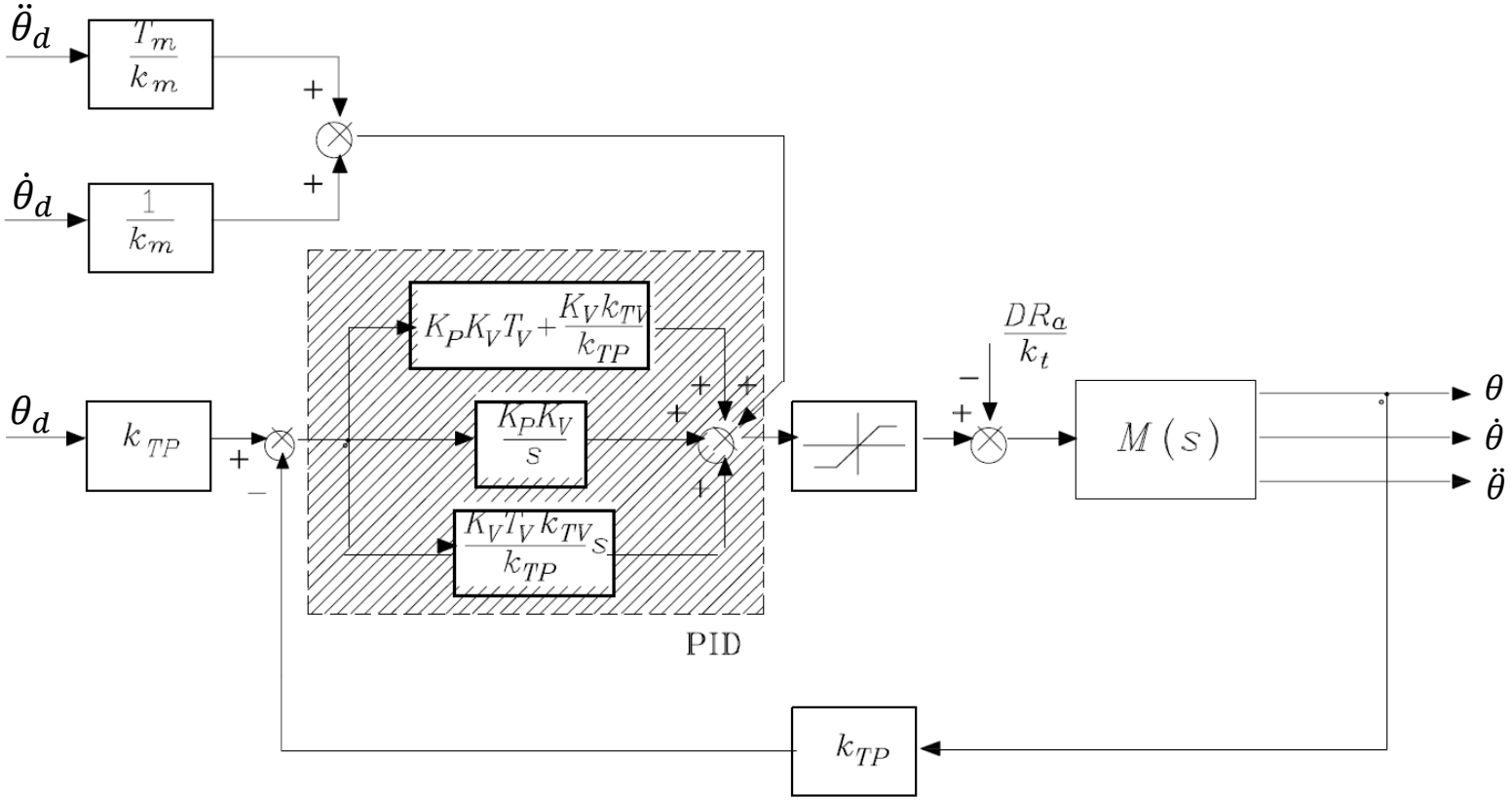
$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{k_{TV}}{K_P k_{TP}} s + \frac{s^2}{k_m K_P k_{TP} K_V}}$$

$$\Theta'_r(s) = \left( k_{TP} + \frac{k_{TV}}{K_P} s + \frac{s^2}{k_m K_P K_V} \right) \Theta_d(s)$$




Schema di controllo con retroazione di posizione e di velocità, e compensazione in avanti decentralizzata

# Compensazione in avanti decentralizzata

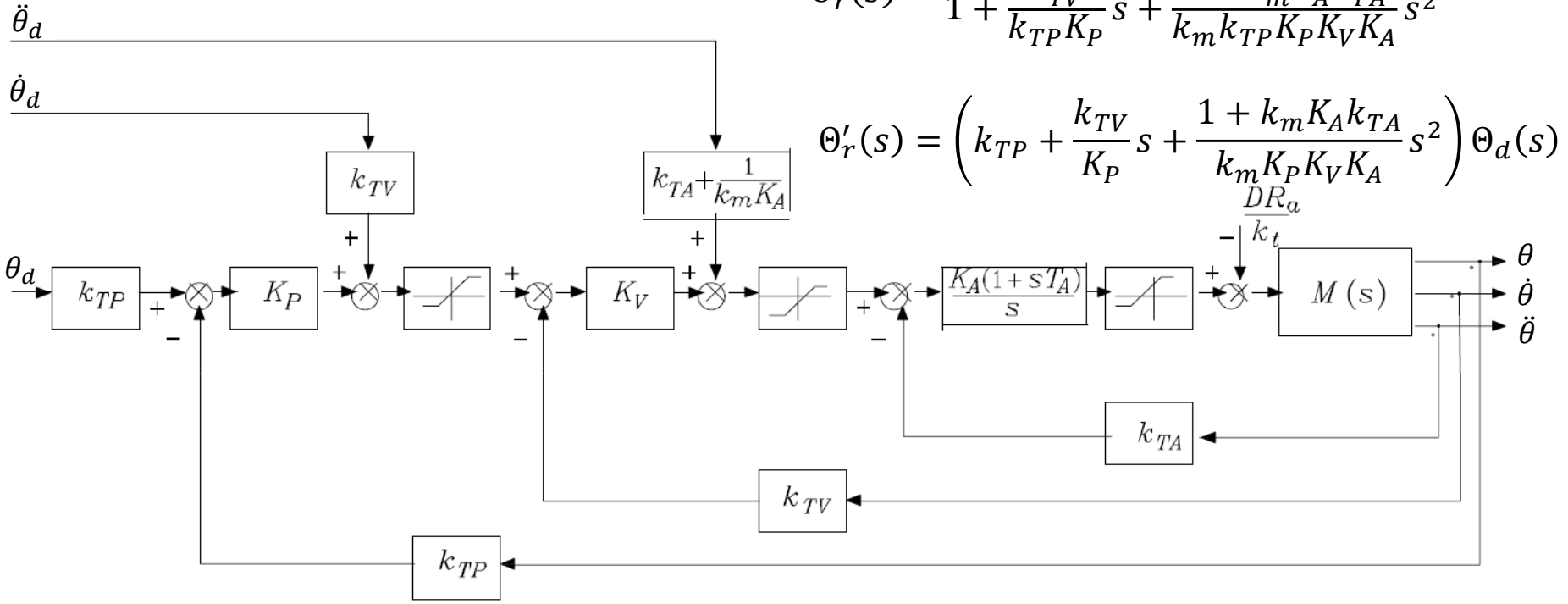



Schema di controllo equivalente di tipo PID

# Compensazione in avanti decentralizzata

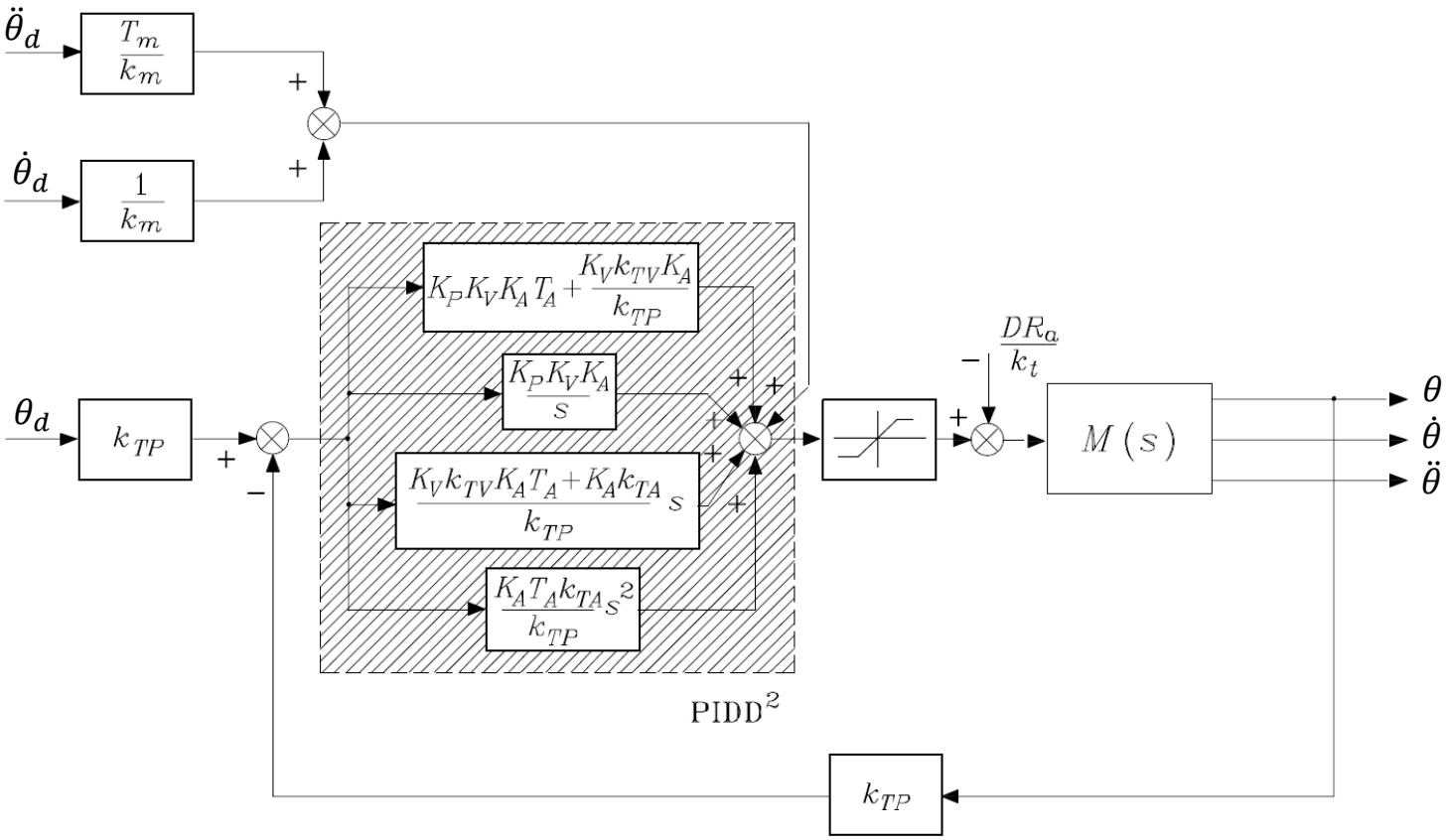
$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{k_{TV}}{k_{TP}K_P}s + \frac{1 + k_m K_A k_{TA}}{k_m k_{TP} K_P K_V K_A}s^2}$$

$$\Theta'_r(s) = \left(k_{TP} + \frac{k_{TV}}{K_P}s + \frac{1 + k_m K_A k_{TA}}{k_m K_P K_V K_A}s^2\right)\Theta_d(s)$$



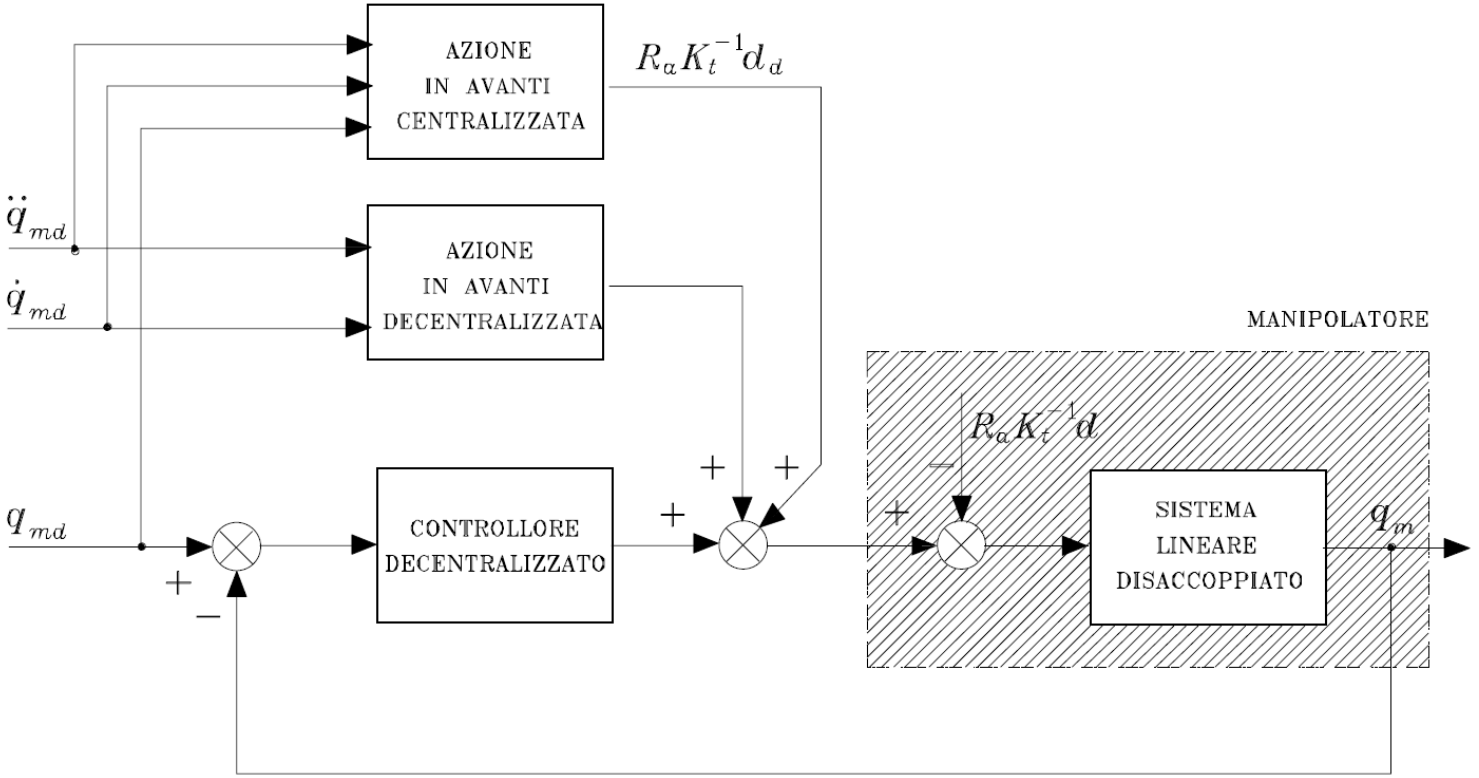

Schema di controllo con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione, e compensazione in avanti decentralizzata

# Compensazione in avanti decentralizzata




Schema di controllo equivalente di tipo PIDD$^2$

# Coppia precalcolata




$$d_d = K_r^{-1}\Delta B(q_d)K_r^{-1}\ddot{q}_{md} + K_r^{-1}C(q_d,\dot{q}_d)K_r^{-1}\dot{q}_{md} + K_r^{-1}g(q_d)$$

# Controllo centralizzato

Manipolatore: $B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau$

**Sistema controllato in velocità (in tensione)**

Organi di trasmissione :

$$\begin{cases} K_r q = q_m \\ \tau_m = K_r^{-1}\tau \end{cases}$$

Azionamenti elettrici:

$$\begin{cases} K_r^{-1}\tau = K_t i_a \\ v_a = R_a i_a + K_v \dot{q}_m \\ v_a = G_v v_c \end{cases}$$

# Controllo centralizzato

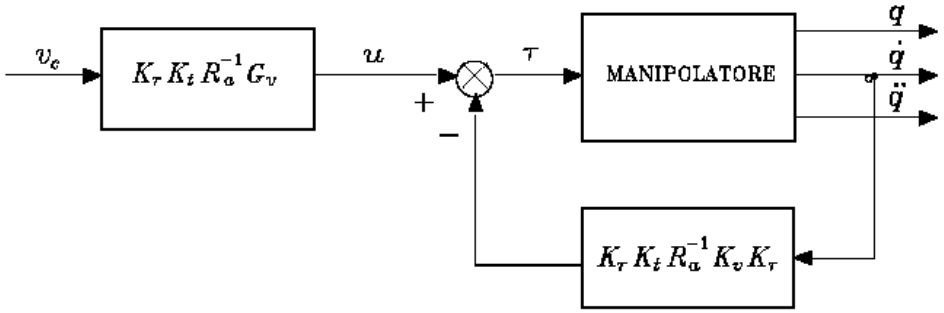
$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u$$

$$F = F_v + K_r K_t R_a^{-1} K_v K_r$$

*Attrito viscoso meccanico e elettrico (matrice diagonale)*

$$u = K_r K_t R_a^{-1} G_v v_c$$

*Ingresso di controllo del sistema*




$$\tau = K_r K_t R_a^{-1} G_v v_c - K_r K_t R_a^{-1} K_v K_r \dot{q} \quad \Rightarrow \quad v_c$$

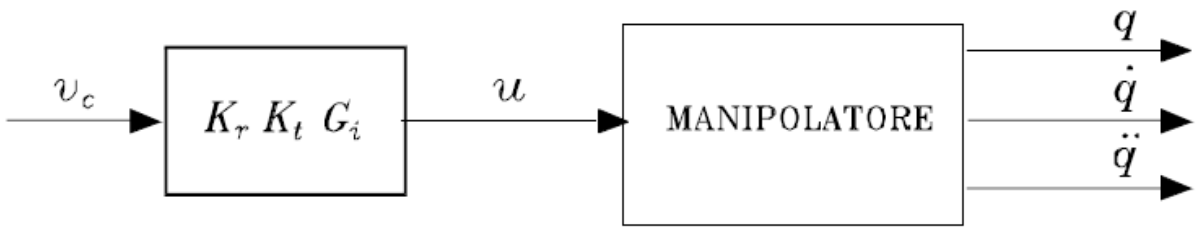
# Controllo centralizzato

**Sistema controllato in coppia (in corrente)**

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u$$

Attuatori:

$$\begin{cases} \tau = K_r K_t i_a \\ i_a = G_i v_c \end{cases} \qquad \begin{cases} F = F_v \\ u = K_r K_t G_i v_c = \tau \end{cases}$$



# Controllo PD con compensazione di gravità

**Controllo PD con compensazione di gravità**

Obiettivo: progetto di un controllore che garantisca la stabilità asintotica globale del punto di equilibrio.

$\tilde{q} = q_d - q$ *errore*

$[\tilde{q}^T, \dot{q}^T]^T$ *stato del sistema*

Funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_P \tilde{q} > 0 \qquad \forall \dot{q}, \tilde{q} \neq 0$$

*energia cinetica* *energia potenziale elastica virtuale*

# Controllo PD con compensazione di gravità

$$V(\dot{q},\tilde{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_P \tilde{q} > 0$$

Derivando: $$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_P \tilde{q}$$

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u$$

$$\Rightarrow \quad B(q)\ddot{q} = -C(q,\dot{q})\dot{q} - F\dot{q} - g(q) + u$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})\right]\dot{q} - \dot{q}^T F\dot{q} + \dot{q}^T[u - g(q) - K_P\tilde{q}]$$

# Controllo PD con compensazione di gravità

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})\right]\dot{q} - \dot{q}^T F_v \dot{q} + \dot{q}^T[u - g(q) - K_P\tilde{q}]$$

$N(q,\dot{q}) = \dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})$ antisimmetrica ➡ $\omega^T N(q,\dot{q})\omega = 0 \quad \forall\omega$

Si sceglie $u = g(q) + K_P\tilde{q}$

➡ $\dot{V} = -\dot{q}^T F \dot{q}$ semidefinita negativa $\left(\dot{V} = 0 \quad \dot{q} = 0 \ \forall\tilde{q}\right)$

**Scelta alternativa per $u$:**

$u = g(q) + K_P\tilde{q} - K_D\dot{q}$ *azione proporzionale derivativa*

➡ $\dot{V} = -\dot{q}^T(F + K_D)\dot{q}$ semidefinita negativa $\left(\dot{V} = 0 \quad \dot{q} = 0 \ \forall\tilde{q}\right)$

# Controllo PD con compensazione di gravità

Determinazione della postura di equilibrio :

$$u = g(q) + K_P\tilde{q} - K_D\dot{q}$$

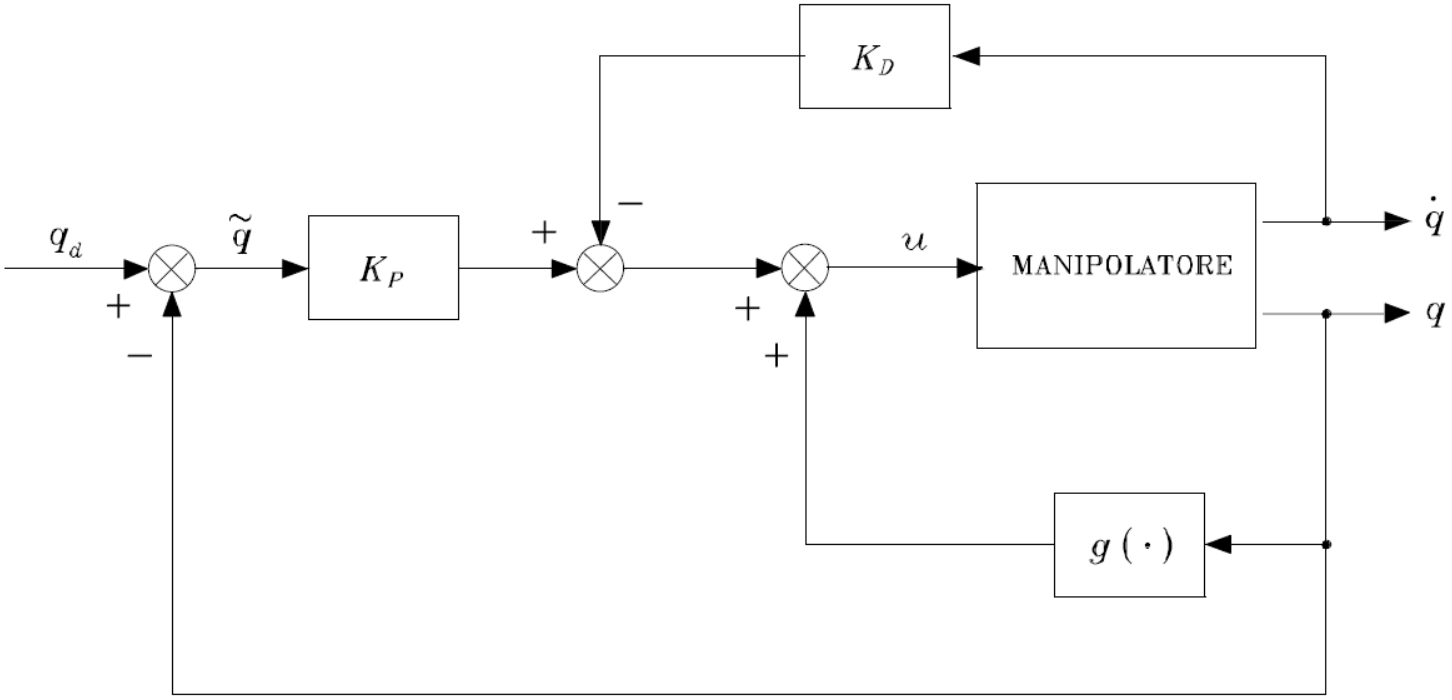
$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = u$$

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = g(q) + K_P\tilde{q} - K_D\dot{q}$$

All'equilibrio : $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0 \Rightarrow K_P\tilde{q} = 0$

$$\tilde{q} = q_d - q = 0 \Rightarrow q_d = q$$

# Controllo PD con compensazione di gravità




$$u = g(q) + K_P\tilde{q} - K_D\dot{q}$$

# Controllo PD con compensazione di gravità

- Tramite questa tecnica di controllo qualunque postura di equilibrio risulta *globalmente asintoticamente stabile*
- La componente gravitazionale va compensata in maniera perfetta (affinché il risultato sia garantito matematicamente)

# Controllo a dinamica inversa

## Feedback linearization

$$x^{(n)} = f(x) + b(x)u$$

$$u = \frac{1}{b(x)}[v - f(x)] \qquad \textit{azione di controllo}$$

$$\Rightarrow \quad x^{(n)} = f(x) + b(x)\left\{\frac{1}{b(x)}[v - f(x)]\right\}$$

$$x^{(n)} = v$$

Posto: $v = -k_1 x - k_2 \dot{x} - \cdots - k_n x^{(n-1)}$

$$\Rightarrow \quad x^{(n)} + k_n x^{(n-1)} + \cdots + k_1 x = 0$$

# Controllo a dinamica inversa

**Controllo a dinamica inversa**
**(momento calcolato, feedback linearization)**

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u$$

Posto : $n(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$

Si sceglie $u = B(q)y + n(q,\dot{q})$

$$B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = B(q)y + n(q,\dot{q})$$

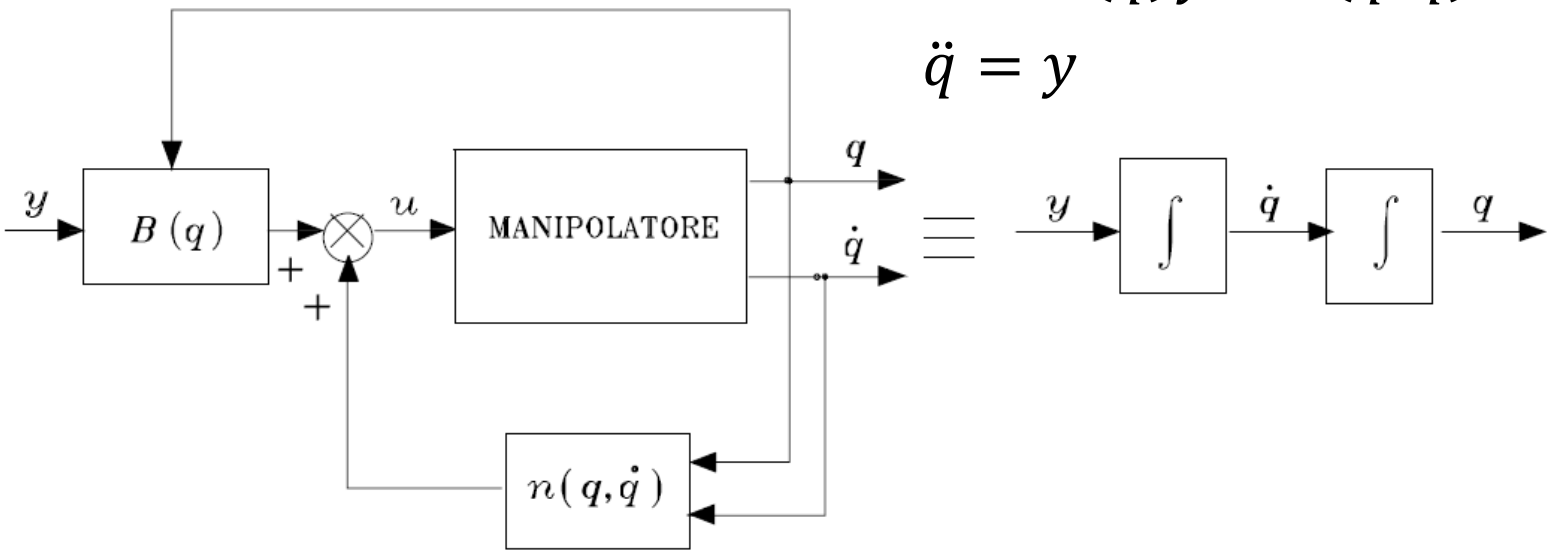
$$\ddot{q} = y$$

$y$ diviene l'ingresso del nuovo sistema

# Controllo a dinamica inversa

$$u = B(q)y + n(q, \dot{q})$$

$$\ddot{q} = y$$




Come scegliere $y$?

# Controllo a dinamica inversa

$\ddot{q} = y$ Posto: $y = -K_P q - K_D \dot{q} + \mathbf{r}$ (*con* $\mathbf{r}$ *da definire*)

$$\ddot{q} + K_D \dot{q} + K_P q = \mathbf{r}$$

$\mathbf{r}$ va scelto opportunamente, in modo da garantire che l'uscita $q(t)$ insegua la traiettoria assegnata $q_d(t)$

Scelto: $\mathbf{r} = \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$

$$\ddot{q} + K_D \dot{q} + K_P q = \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$$

$\tilde{q} = q_d - q$ *errore sulla traiettoria*

$$\ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} = 0$$

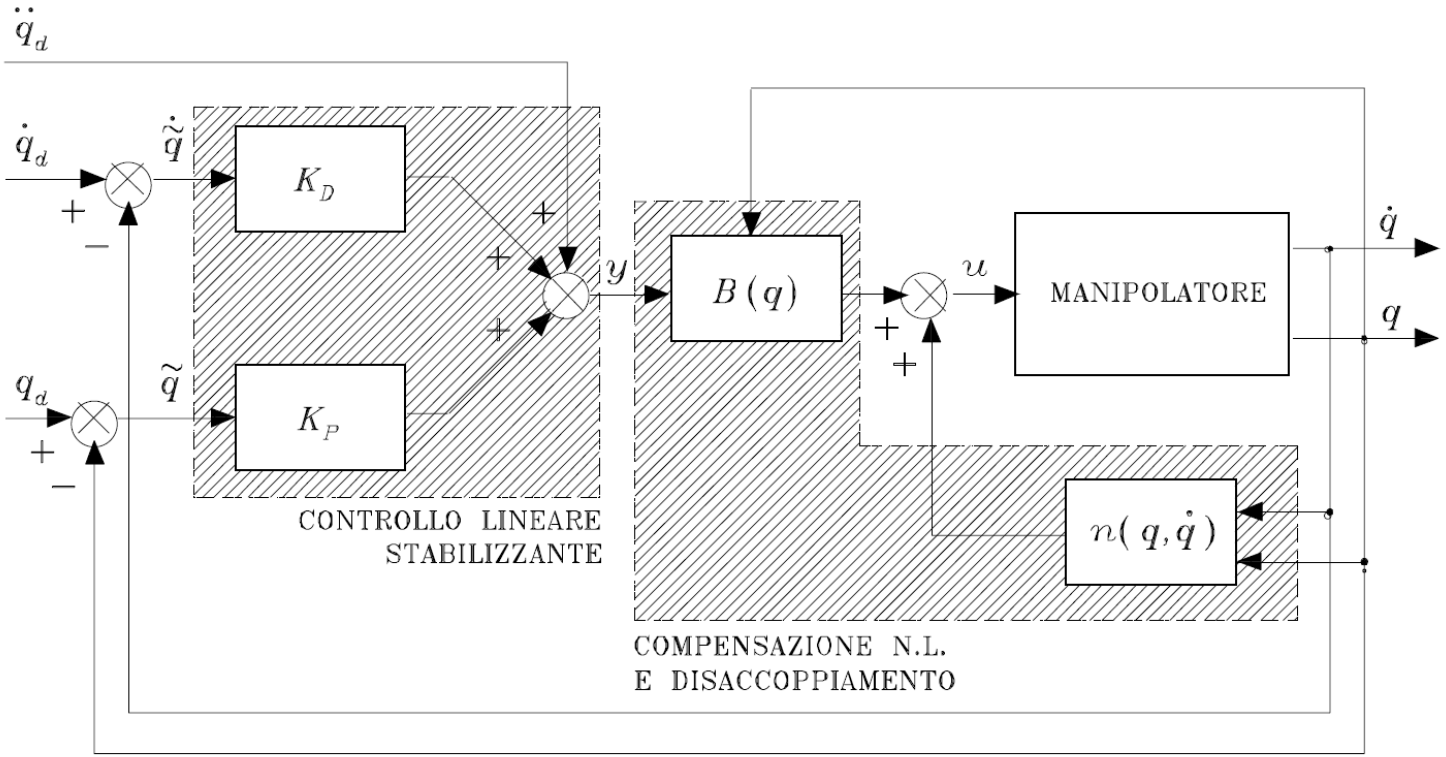
# Controllo a dinamica inversa

$$\ddot{\tilde{q}} + K_D\dot{\tilde{q}} + K_P\tilde{q} = 0$$

$$K_P = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{nn}^2 \end{bmatrix} \qquad K_D = \begin{bmatrix} 2\delta_1\omega_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\delta_2\omega_{n2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\delta_n\omega_{nn} \end{bmatrix}$$

Attraverso la scelta delle matrici $K_P$ e $K_D$ diagonali si ottiene un sistema disaccoppiato: la componente del riferimento $r_i$ influenza la sola variabile di giunto $q_i$ con una relazione I/O del secondo ordine, caratterizzata da una pulsazione naturale $\omega_{ni}$ e da un coefficiente di smorzamento $\delta_i$

# Controllo a dinamica inversa




$$u = B(q)\left[K_P\tilde{q} + K_D\dot{\tilde{q}}\right] + B(q)\ddot{q}_d + n(q,\dot{q})$$

PD

Cancellazione dinamica

# Controllo nello Spazio Operativo

Negli schemi precedenti si suppone che la traiettoria desiderata sia disponibile istante per istante, poiché l'errore è espresso nello spazio dei giunti.

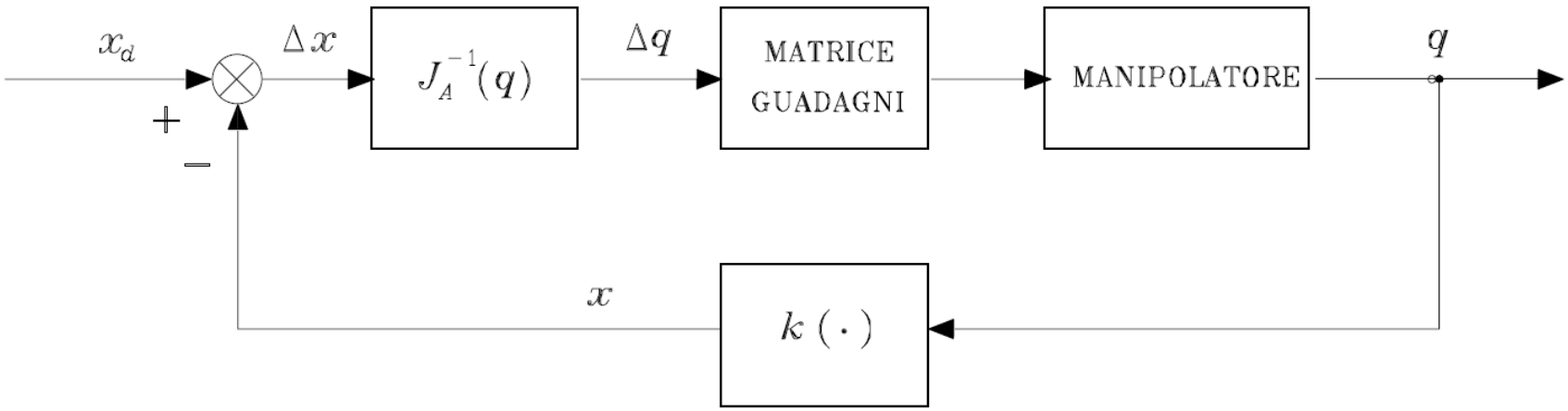
Le specifiche di moto sono solitamente prescritte nello spazio operativo: necessario un algoritmo di inversione della cinematica per ricavare i riferimenti degli schemi di controllo operanti nello spazio dei giunti.

ALTERNATIVA: si sviluppa uno schema di controllo direttamente nello spazio operativo (richieste computazionali onerose).

Dalle misure delle variabili di giunto attuali si ricavano, mediante cinematica diretta, le grandezze nello spazio operativo, che vengono confrontate con quelle desiderate per calcolare l'errore.

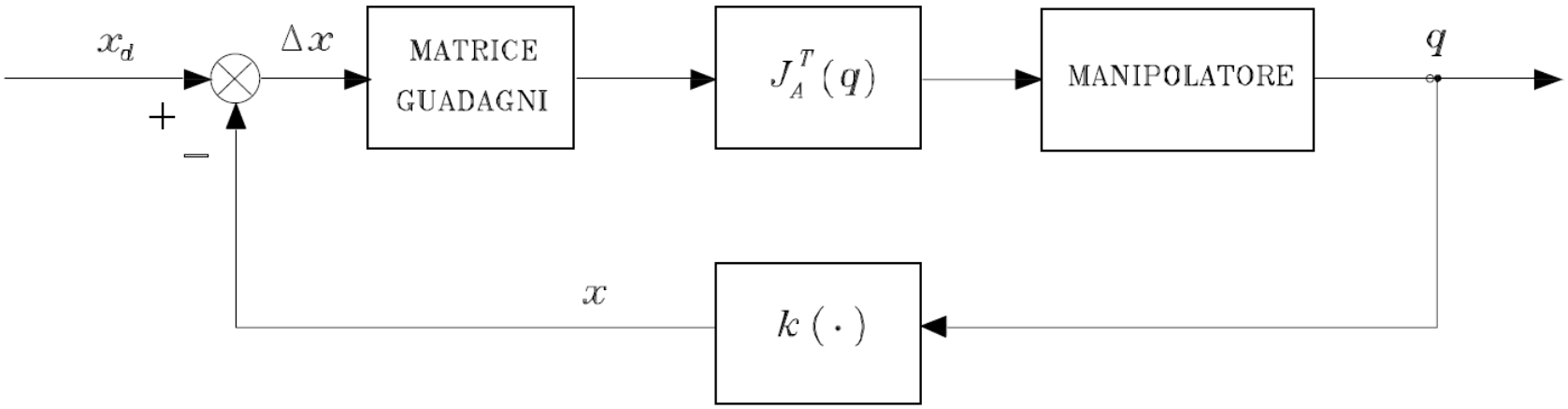
# Controllo nello Spazio Operativo

**Controllo con inversa dello Jacobiano**



# Controllo nello Spazio Operativo

**Controllo con trasposta dello Jacobiano**



# Controllo PD con compensazione di gravità

## Controllo PD con compensazione di gravità

$\tilde{x} = x_d - x$ *errore nello spazio operativo*

Funzione candidata di Lyapunov:

$$V(\dot{q}, \tilde{x}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{x}^T K_P \tilde{x} > 0 \qquad \forall \dot{q}, \tilde{x} \neq 0$$

Derivando: $\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x}$

$\dot{x}_d = 0 \quad \dot{x} = J_A(q)\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{x}} = \dot{x}_d - \dot{x} = -J_A(q)\dot{q}$

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \dot{q}^T J_A^T(q) K_P \tilde{x}$$

# Controllo PD con compensazione di gravità

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \dot{q}^T J_A^T(q) K_P \tilde{x}$$

$$B(q)\ddot{q} = -C(q,\dot{q})\dot{q} - F\dot{q} - g(q) + u$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left[\dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})\right]\dot{q} - \dot{q}^T F\dot{q} + \dot{q}^T [u - g(q) - J_A^T(q) K_P \tilde{x}]$$

$N(q,\dot{q}) = \dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})$ antisimmetrica ➡ $\omega^T N(q,\dot{q})\omega = 0 \quad \forall \omega$

Si sceglie $u = g(q) + J_A^T(q) K_P \tilde{x} - J_A^T(q) K_D J_A(q)\dot{q}$

➡ $\dot{V} = -\dot{q}^T F\dot{q} - \dot{q}^T J_A^T(q) K_D J_A(q)\dot{q}$ semidefinita negativa

# Controllo PD con compensazione di gravità

Determinazione della postura di equilibrio :

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u$$

$$u = g(q) + J_A^T(q)K_P\tilde{x} - J_A^T(q)K_D J_A(q)\dot{q}$$

$$\Rightarrow \quad B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = g(q) + J_A^T(q)K_P\tilde{x} - J_A^T(q)K_D J_A(q)\dot{q}$$

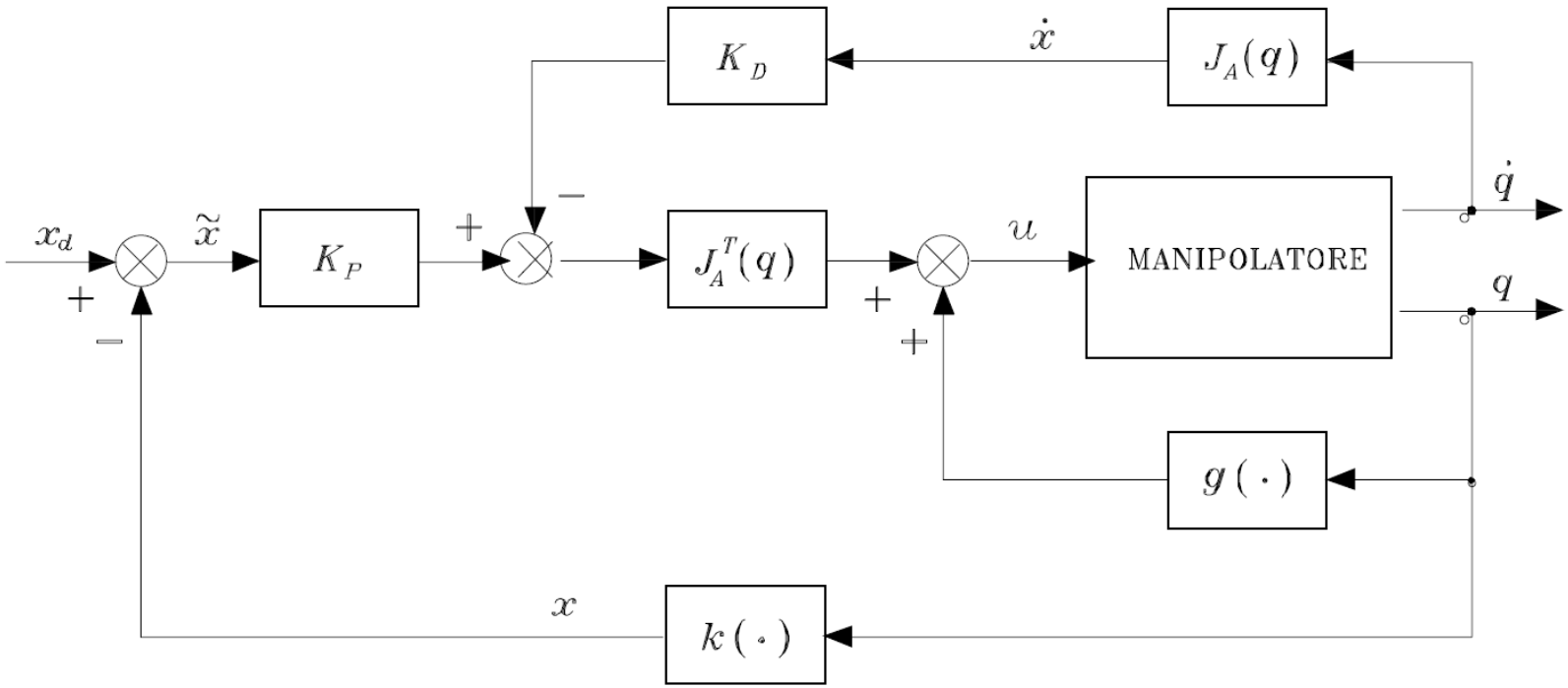
$$\Rightarrow \quad B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} - J_A^T(q)K_P\tilde{x} + J_A^T(q)K_D J_A(q)\dot{q} = 0$$

All'equilibrio : $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad -J_A^T(q)K_P\tilde{x} = 0$

Se lo Jacobiano è a rango pieno :

$$\tilde{x} = x_d - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_d = x$$

# Controllo PD con compensazione di gravità




$$u = g(q) + J_A^T(q)K_P\tilde{x} - J_A^T(q)K_D J_A(q)\dot{q}$$

# Controllo a dinamica inversa

**Controllo a dinamica inversa**
**(momento calcolato, feedback linearization)**

$$B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = u$$

Si sceglie $u = B(q)y + n(q,\dot{q})$

$$B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = B(q)y + n(q,\dot{q})$$

$$\ddot{q} = y$$

$y$ diviene l'ingresso del nuovo sistema

# Controllo a dinamica inversa

$$\ddot{q} = y$$

Per un manipolatore non ridondante, si pone

$$y = J_A^{-1}(q)\left[\ddot{x}_d + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} - \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q} = J_A^{-1}(q)\left[\ddot{x}_d + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} - \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}\right]$$

Derivando la relazione della cinematica differenziale:

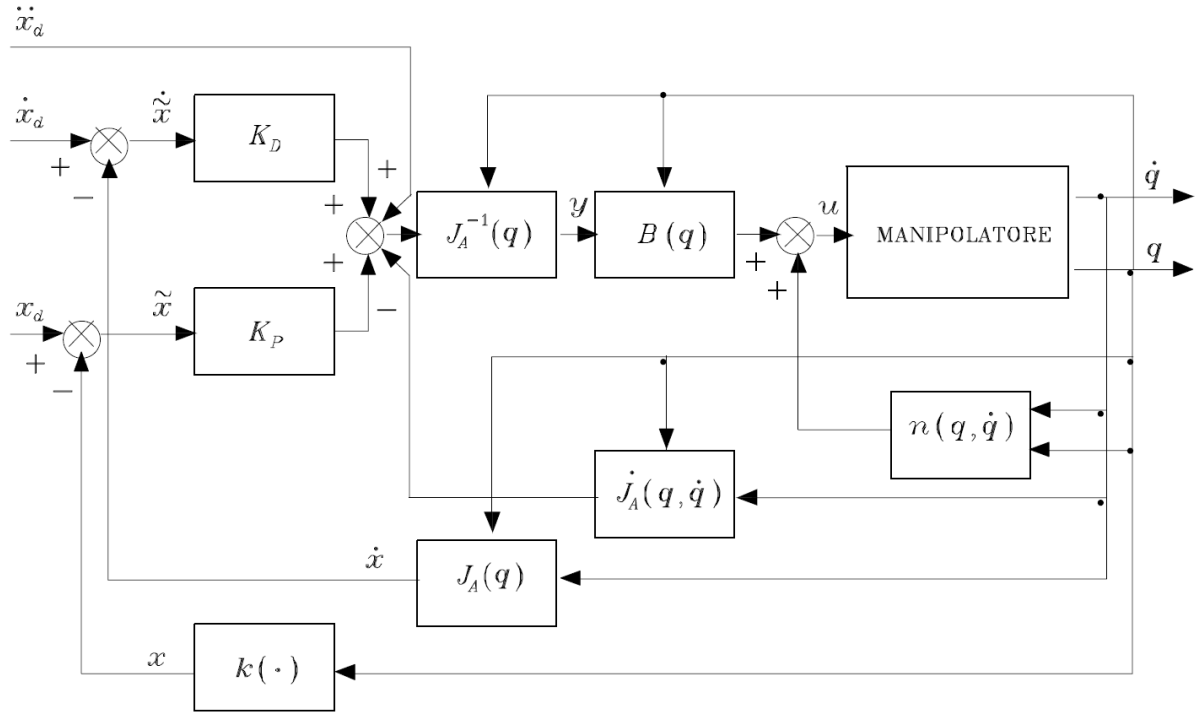
$$\ddot{x} = J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q} \qquad \ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}_d - \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x}_d = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q} = J_A^{-1}(q)\left[J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q} + \ddot{\tilde{x}} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} - \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}\right]$$

$$\ddot{q} = \ddot{q} + J_A^{-1}(q)\left[\ddot{\tilde{x}} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x}\right] \Rightarrow J_A^{-1}(q)\left(\ddot{\tilde{x}} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x}\right) = 0$$

$$\ddot{\tilde{x}} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} = 0$$

# Controllo a dinamica inversa




$$u = B(q)y + n(q,\dot{q})$$

$$y = J_A^{-1}(q)\left[\ddot{x}_d + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} - \dot{J}_A(q,\dot{q})\dot{q}\right]$$

# Considerazioni conclusive

- Il controllo nello spazio operativo è in genere più complesso del controllo nello spazio dei giunti (è sempre richiesto il calcolo dello Jacobiano)

- In presenza di singolarità e/o ridondanza:
  - Negli schemi con trasposta di $J$ se l'errore entra nel nullo di $J$ il manipolatore si ferma in una configurazione diversa da quella desiderata
  - Negli schemi con inversa di $J$ si devono trovare accorgimenti numerici (es. inversa ai valori singolari smorzati)

# Considerazioni conclusive

- Il controllo dei giunti è, in un certo senso, trasparente a tali problemi, in quanto ridondanze e singolarità vengono affrontate a monte, durante l'inversione cinematica, mentre in questo caso devono essere gestite *all'interno* dell'anello di controllo

- Se, come in questi casi, si usa lo Jacobiano analitico, bisogna rifarsi a rappresentazioni minime dell'orientamento. Per utilizzare lo Jacobiano geometrico (più semplice da determinare) bisogna scegliere rappresentazioni più complesse (es. asse/angolo o quaternione unitario)