Esercizio 1 (Modulo 1) Considerato il sistema in Fig. 1 dove $G_c(s) = \frac{k}{s}$ e $G_p(s) = \frac{1}{s+p}$ con $k > 0$ e $p > 0$.

[1] Determinare la relazione tra k e p per la quale il sistema in anello chiuso è del secondo ordine e sottosmorzato.
[2] Posti $r(t) = 2 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 0$, determinare i valori di k e p tali che l'uscita $y(t)$ abbia un massimo assoluto per $t = 2$ sec avente ordinata pari ad 2.5 ($y(2) = 2.5$).
[3] Disegnare la risposta del punto 2 indicando sul grafico almeno valore a regime, tempo di assest. al 2%, inviluppi.
[4] Mantenendo p del punto 2, dire se diminuendo il valore di k il valore del massimo assoluto (a) cresce o (b) decresce
[5] Con k e p del punto 2 determinare il valore a regime dell'uscita $y(t)$ quando $r(t) = 1(t)$ e $d(t) = e^{-t}1(t) - 1(t)$.

Punto 1

$$G_0(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{\frac{k}{s(s+p)}}{1 + \frac{k}{s(s+p)}} = \frac{k}{s^2 + ps + k}$$

$G_0(s)$ è in forma di f.d.t. di sist. sec. ord senza zeri con guad statico unitario ($G_0(0) = 1$) $\Rightarrow$

$$\omega_n^2 = k \qquad p = 2\delta\omega_n \Rightarrow \delta = \frac{p}{2\omega_n} = \frac{p}{2\sqrt{k}}$$

$\Rightarrow$ Impong $\delta < 1$ (sottosm.) $\Rightarrow$ $\boxed{p < 2\sqrt{k}}$

Punto 2

L'ingresso è un gradino con ampiezza 2, $G_0(0) = 1$ $\Rightarrow$ $y(\infty) = 2$. Il max assoluto è $y(t_p)$ con t_p tempo di picco $\Rightarrow$ $y(t_p) = 2.5$. Ma sa che

$$M_{p\%} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100 = \exp\left(-\frac{\pi}{\tg\theta}\right) 100$$

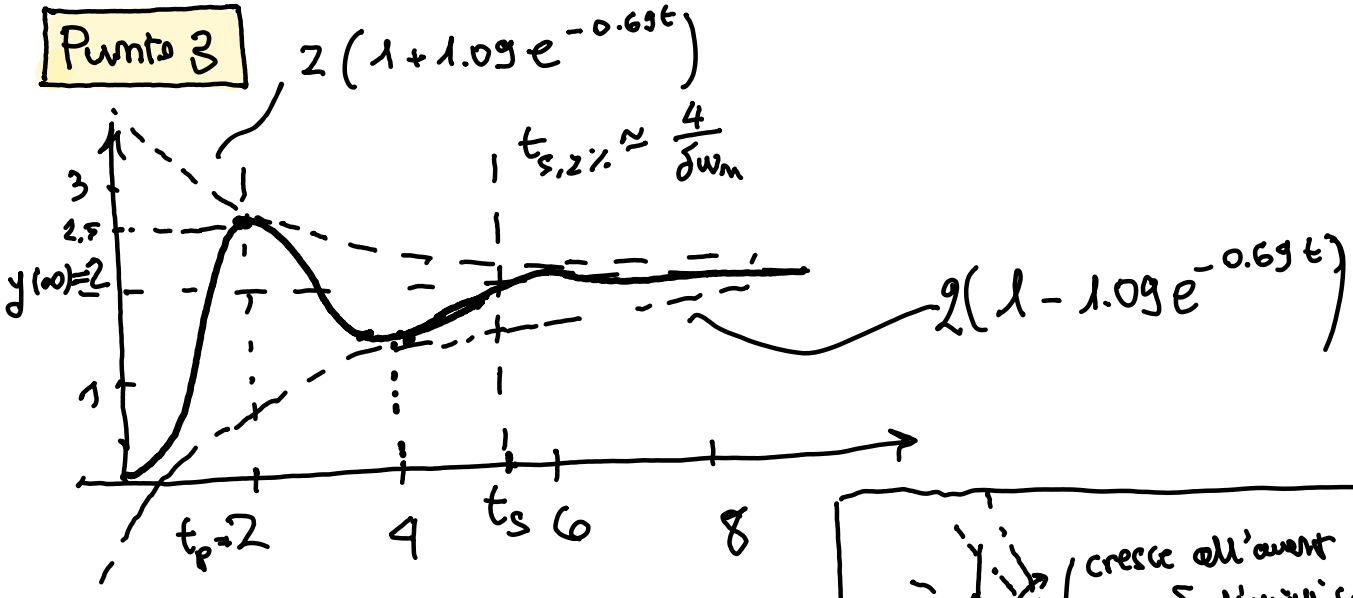
$y(t_p) = 2.5 \Rightarrow M_{p\%} = 25\% \Rightarrow \theta = \operatorname{atan}\left(-\frac{\pi}{\log(M_p)}\right) = 1.15$ rad

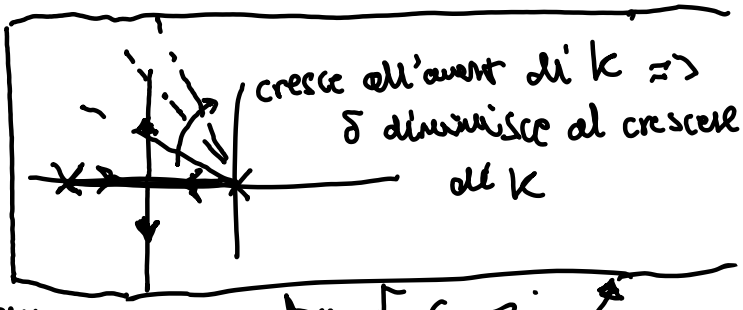
$\Rightarrow \delta = \cos(\theta) = 0.403$

Ma $t_p = 2 = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{3.14}{2 \cdot 0.9149} = 1.7169 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{k = \omega_n^2 \simeq 2.948}$ e $\boxed{p = 2\delta\omega_n = 1.3863}$

Punto 3





Punto 4

Se diminuisce ξ necessariamente aumenta δ (vedi luogo delle radici) dunque **$M_{p\%}$ diminuisce**

Punto 5

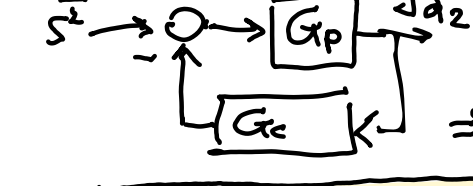
Princ. di sovr. degli effetti:

$$y(\infty) = y_r(\infty) + y_d(\infty) \qquad y_r(\infty) = r(\infty) \text{ perché } e_p = 0$$

$$\Rightarrow y_r(\infty) = 1. \text{ Inoltre } y_d(\infty) = y_{d_1}(\infty) + y_{d_2}(\infty)$$

dove $D_1(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1}$ e $D_2(s) = -\frac{1}{s^2}$

$D_1(s)$ è di tipo 1 $\Rightarrow$ reiettato dal controllore per princ. mod. int.



$$Y_{D_2} = -\frac{G_p \frac{1}{s^2}}{1+G_cG_p} = -\frac{\frac{1}{s+p}\cdot\frac{1}{s^2}}{1+\frac{k}{s(s+p)}} = -\frac{s}{s^2+ps+k}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow y_{d_2}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,Y_{D_2}(s) = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2.948} \simeq -0.34$$

$$\Rightarrow \boxed{y(\infty) = 1 - 0.34 = 0.66}$$

Esercizio 2 (Modulo 1) Considerato il sistema di controllo in Fig. 1 ($d(t) = 0$) con:

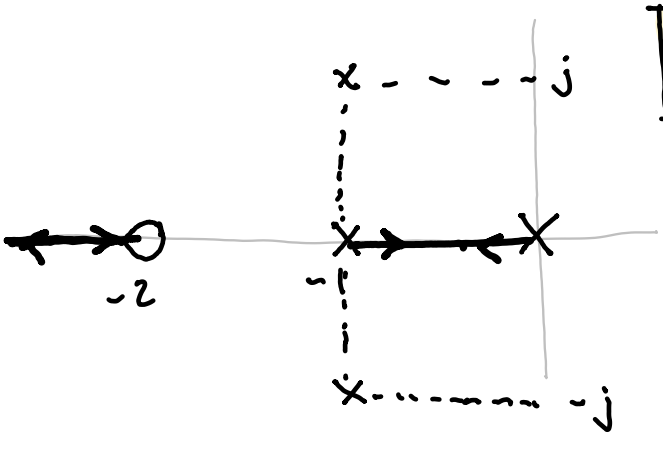
$$G_c(s) = k \quad G_p(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$$

[1] Disegnare il luogo delle radici al variare di $k \in \mathbb{R}_+$ specificando se presenti: gli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario, i punti di confluenza/emersione, angoli di partenza del luogo dai poli e angoli di arrivo agli zeri.

[2] Studiare la stabilità del sistema in anello chiuso al variare di $k \in \mathbb{R}_+$;

[3] Giustificando la risposta, determinare se, per il valore del guadagno che porta il sistema in anello chiuso ad avere una coppia di poli sull'asse immaginario, i restanti due poli sono (a) reali e distinti o (b) complessi e coniugati.

[4] Giustificando la risposta, impostato $k = 4$ dire se la riposta al gradino presenta andamento (a) non oscillatorio convergente (b) non oscillatorio divergente, (c) oscillatorio convergente, (d) oscillatorio divergente.



Mappa poli zeri, punti dell'asse reale appartenenti al LR_+

Analizzando i punti del LR_+ e asse reale e l'andamento dei rami per $k \to 0$ e $k \to \infty$ è evidente che esiste un punto di emersione in $]-1, 0[$ e un punto di confluenza in $]-\infty, -2[$

Trovo pos. approssimata con eq. caratt.:

$$k = \left|\frac{1}{L(s)}\right|$$

Punto di emersione

s	k
-0.4	0.204
-0.5	0.208
-0.6	0.1989

$s_{em} \simeq -0.5 \quad k_{em} \simeq 0.208$

Punto di confluenza

s	k
-3	30
-2.5	24.3
-2.2	32.2

$s_{con} = -2.5 \quad k_{con} = 24.3$

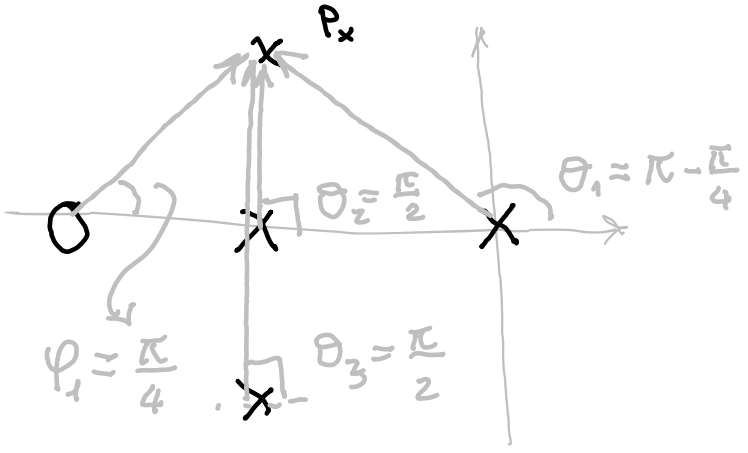
Asintoti

$n - m = 3 \Rightarrow \theta_{a,p} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = -\frac{1}{3}$

Fondamenti di Automatica
Ing. Informatica e dell'Automazione (A-K) e (A-L) e Ing. Sistemi Medicali
Politecnico di Bari - 23/1/2020
N.B. E' obbligatorio consegnare sia il foglio delle risposte che lo svolgimento del compito

Angolo partenza da $p_x = -1+j$



$$\theta_x = \varphi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + (2l+1)\pi$$

$$\theta_x = \frac{\pi}{4} - \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_x = -\frac{\pi}{2}}$$

Intersez. assi / Stabilità

$$a_0(s) = 1 + kL(s) = 1 + k\,\frac{s+2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$a_0(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (k+2)s + 2k$$

Tab. di Routh

4	1	4
3	3	$k+2$
2	$10-k$	$6k$
1	A	
0	$6k$	

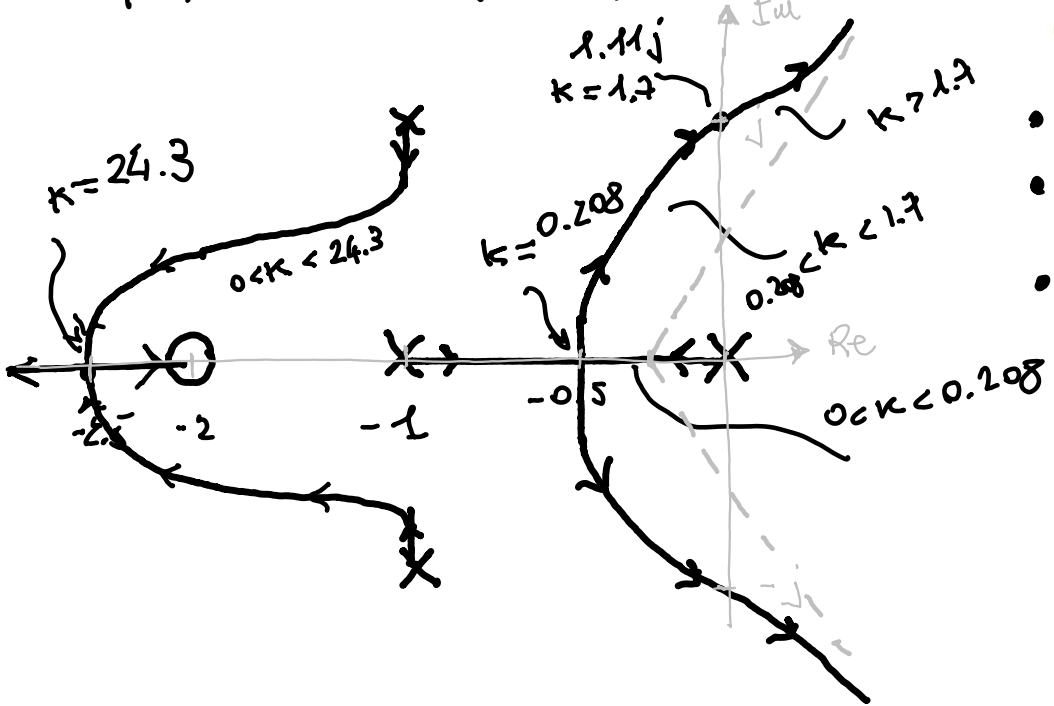
$2k$

$$A = \frac{(10-k)(k+2) - 18k}{10-k} \simeq \frac{k^2 + 10k - 20}{k-10}$$

Intersez. con assi se $A = 0$ (riga 1 nulla)

$k^2 + 10k - 20 = 0 \quad k = \begin{cases} -11.708 \\ 1.708 \end{cases}$

$\hookrightarrow (10-k)s^2 + 6k = 0 \Rightarrow 8.29\,s^2 + 10.25 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\,1.11$



Stabilità

- Sist. as. stab per $0 < k < 1.7$
- Sist. inst. con 2 poli nel sp. dx per $k > 1.7$
- Sist. semp. stab per $k = 1.7$

Punto 3

Il sist. ha una coppia di poli sull'asse imm. per $k \cong 1.11$.
Analizzando il LR_+ si vede che per $K \in [0, K_{crit}]$ gli altri due rami non sono ancora confluiti nell'asse reale. Dato che $1.11 \in [0, K_{crit}]$ possiamo concludere che i restanti due poli per $K = 1.11$ sono compl. e coniugati.

Punto 4

Per $K = 4$ sappiamo che il sistema è instabile con una coppia di poli complessi e coniugati ($K = 1.11 > K_{crit}$) nel semip. destro. A causa di questi poli, per $K = 4$ la risp. al gradino del sistema mostrerà un andamento oscillatorio divergente